Algebra Zusatzbeispiele 6-13: Wohlordnungen

Clemens Koppensteiner
Dominik Stürzer

Definition 1 (Wohlordnung). *Eine Totalordung $\leq$ auf einer Menge A heißt* Wohlordnung*, wenn jede nichtleere Teilmenge von A bezüglich $\leq$ ein Minimum besitzt.*

Definition 2 (Anfangsabschnitt). *Eine Teilmenge T einer Totalordnung W heißt* Anfangsabschnitt *von W, wenn*

$$\forall t \in T \ \forall x \in W : x < t \Rightarrow x \in T.$$

Der Anfangsabschnitt vor einem Element $x \in W$ sei durch

$$W_{<x} := \{t \in W : t < x\}$$

bezeichnet. Analog sei

$$W_{\leq x} := \{t \in W : t \leq x\}.$$

Definition 3 (Prinizip der transfiniten Induktion). *Man nennt eine Teilmenge T einer Totalordnung $(W, \leq)$* induktiv*, wenn*

$$\forall x \in W : W_{<x} \subseteq T \Rightarrow x \in T.$$

Ist W die einzige induktive Teilmenge von W, so sagt man, in $(W, \leq)$ gelte das Prinzip der transfiniten Induktion.

Satz 1 (Beispiel 6). *Eine Totalordnung $(W, \leq)$ ist genau dann Wohlordnung, wenn ihn ihr das Prinzip der transfiniten Induktion gilt.*

Beweis.

"$\Rightarrow$": Sei W eine Wohlordnung und $T \subset W$ eine induktive Teilmenge. Es sei

$$S := T^c = W \setminus T.$$

Da die Menge S nichtleer ist muss sie ein minimales Element x_0 haben für welches dann gilt:

$$\forall x \in W : x < x_0 \Rightarrow x \in T.$$

Es liegt als der Anfangsabschnitt $W_{<x_0}$ in T, aber x_0 selbst nicht. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass T induktiv ist. Daher ist W selbst die einzige induktive Teilmenge von W.

"$\Leftarrow$": (indirekt) Es sei W keine Wohlordnung, in W gelte aber das Prinizip der transfiniten Induktion. Da W keine Wohlordnung ist gibt es sicher eine Teilmenge S ohne minimalem Element. Diese Menge kann zu einer Menge

$$X := \{x \in W : \exists y \in S \text{ mit } y < x\}$$

erweitert werden, die noch immer kein Minimum hat.

Es sei

$$T := \{w \in W : w < x \ \forall x \in X\},$$

also $T = X^c$. Gäbe es jetzt ein $w \in W$ für das $W_{<w} \subseteq T$, aber $w \notin T$, dann müsste $w \in X$ sein. Da es aber zu jedem $w \in X$ ein kleineres x aus X gibt, kann $W_{<w}$ nicht gänzlich in T liegen (er enthält ja auch $x \in X$). Für jedes $w \in T$ liegt der Anfangsabschnitt klarerweise in T. Daher ist T induktiv. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass in W das Prinizip der transfiniten Induktion gilt.

Es kann also keine Teilmengen von W ohne Minimum geben, $(W, \leq)$ ist Wohlordnung. □

Die nächsten zwei Sätze werden im Folgenden ohne Beweis verwendet (Beweise siehe VO Mengenlehre 1):

Satz 2 (Beweis durch transfinite Induktion). *Wenn für eine Aussage P in einer Wohlordnung $(W, \leq)$ folgende Bedingungen erfüllt sind, dann gilt die Aussage auf ganz W:*

1. *$P(\min W)$ gilt und*
2. *$\forall b \in W : [(\forall a \in W_{<b} : P(a)) \Rightarrow P(b)]$.*

Satz 3 (Definition durch transfinite Rekursion). *Sei $(W, \leq)$ eine Wohlordung. Eine Famile von Mengen $(A_\alpha)_{\alpha \in W}$ lässt sich eindeutig definieren durch*

1. *$A_{\min W}$ und*
2. *Angabe einer Formel zur Kunstruktion von A_λ, wenn A_α für alle $\alpha < \lambda$ definiert ist.*

Definition 4 (Ordnungsisomorphismus). *Eine in beiden Richtungen monotone bijektive Funktion $f : (W_1, \leq_1) \to (W_2, \leq_2)$ zwischen zwei totalgeordneten Mengen heißt* Ordnungsisomorphismus. *Es gilt dann $a \leq_1 b \Leftrightarrow f(a) \leq_2 f(b)$.*

Es sei eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge von Wohlordnungen definiert durch $V \sim W \Leftrightarrow$ es gibt einen Ordnungsisomorphismus $V \to W$.

Lemma 1. *Sei $(W, \leq)$ eine Wohlordnung und $T \subseteq W$. Dann ist auch $(T, \leq_{|T})$ eine Wohlordnung.*

Lemma 2. *Sei $(W, \leq)$ eine Wohlordnung und T ein Anfangsabschnitt von W. Desweiteren existiere eine Ordnungsisomorphismus $f : W \leftrightarrow T$. Dann ist $W = T$.*

Beweis. Es wird gezeigt das unter dieses Vorraussetzungen sogar $f = \mathrm{id}_W$ gelten muss, womit dann natürlich auch $T = W$. Der Beweis wird mit transfiniter Induktion geführt.

Es sei $0 := \min W$. Dann muss $f(0) = 0$ gelten, da sonst $0 < f(0)$ und daher $f^{-1}(0) < 0$, was natürlich ein Widerspruch ist.

Es sei nun $f(x) = x$ für alle $x < t$. Zu zeigen ist, dass daraus $f(t) = t$ folgt. Aus der Injektivität von f folgt das $f(t) = x < t$ nicht möglich ist, da sonst

$f(t) = x = f(x)$. Wäre nun $f(t) > t$, dann muss auch $t > f^{-1}(t)$. Da aber (wegen der Injektivität von f^{-1}) $f^{-1}(t) \geq t$ gelten muss, folgt $f^{-1}(t) > f^{-1}(t)$, ein Widerspruch. Also ist $f(t) = t$ für alle $t \in W$. □

Lemma 3. *Seien $(V, \leq_1)$, $(W, \leq_2)$ Wohlordnungen. Dann existiert höchtens ein Ordnungsisomorphismus $f : V \leftrightarrow W$.*

Beweis. Seien f und g zwei verschiedene solche Isomorphismen und $v \in V$ fest, $a := f(v)$, $b := g(v)$. Dann sind die Einschränkungen $f|_{V_{\leq v}} : V_{\leq v} \to W_{\leq a}$ und $g|_{V_{\leq v}} : V_{\leq v} \to W_{\leq b}$ ebenfalls Ordnungsismorphismen. Die Einschränkung von gf^{-1} auf $W_{\leq a}$ ist somit ein Isomorphismus zwischen $W_{\leq a}$ und $W_{\leq b}$. Einer dieser Anfangsabschnitte ist im anderen enthalten und es folgt aus Lemma 2, dass $W_{\leq a} = W_{\leq b}$, also $a = b$. Dies gilt für alle $v \in V$, daher ist $f = g$. □

Satz 4 (Beispiel 7: Vergleichbarkeit von Wohlordnungen). *Von zwei Wohlordnungen $(V, \leq_1)$, $(W, \leq_2)$ ist stets eine der beiden isomorph zu einem eindeutig bestimmten Anfangsabschnitt der anderen. Auch der Isomorphismus ist eindeutig. In beide Richtungen ist die Einbettung nur dann möglich, wenn die ganzen Wohlordnungen isomorph sind.*

Es folgt: Für jede Menge X von Wohlordnungen ist $(X/\sim, \preceq)$ mit

$$\overline{V} \preceq \overline{W} :\Leftrightarrow V \text{ ist isomorph zu einen Anfangsabschnitt von } W$$

eine Totalordnung.

Beweis. Zurest soll gezeigt werden, dass immer so eine Einbettung existiert. Dazu sei eine Menge von Ordnungsisomorphismen $f_x : V_{\leq x} \to W$ (mit $x \in V$) definiert durch:

- $f_{\min V} : \{\min V\} \to \{\min W\} : \min V \mapsto \min W$.
- Sei $v \in V$ und f_x für alle $x <_1 v$ definiert. Falls

  $$\bigcup_{x <_1 v} f_x(V_{\leq x}) \subset W,$$

  kann f_v definiert werden durch:

  $$f_v : V_{\leq v} \to W : x \mapsto \begin{cases} f_x(x) & x < v \\ \min\left(W \setminus \bigcup_{y<v} f_y\left(V_{\leq y}\right)\right) & x = v \end{cases}.$$

Sei nun $S := \{x \in V : f_x \text{ ist nicht definiert}\}$. Es können zwei Fälle auftreten:

1. $S = \emptyset$: Dann ist

   $$f : V \to \bigcup_{x \in V} f_x(V_{\leq x}) : x \mapsto f_x(x)$$

   eine Isomorphie von V auf einen Anfangsabschnitt von W. (Genau für $f(V) = W$ gilt auch die Umkehrung und f ist Ordnungsisomorphie $V \leftrightarrow W$.)

2. $S \neq \emptyset$: Es existiert also eine $v := \min S$ für das gilt: $\bigcup_{x<v} f_x(V_{\leq x}) = W$. Die Funktion $f : V_{<v} \to W : x \mapsto f_x(x)$ ist also Ordnungsisomophie von $V_{<v}$ auf W.

Die Eindeutigkeit der Anfangsabschnitte: Seien $f : V \to W_{<a}$ und $g : V \to W_{<b}$ zwei verschiedene Ordnungsisomorphien von V in Anfangsabschnitte von W und oBdA $a <_2 b$. Dann ist $g^{-1}f$ eine Isomorphie zwischen diesen beiden Anfangsabschnitten, daher nach Lemma 2 $W_{<a} = W_{<b}$, also $a = b$.

Die Eindeutigkeit der Isomorphismen: Folgt direkt aus Lemma 3.

Dass die Einbettung in beide Richtungen nur für isomorphe Wohlordnungen möglich ist, folgt aus der Eindeutigkeit die Isomorphien und der Anmerkung bei Fall 1.

Dass $\preceq$ wohldefiniert und auf $X/\sim$ eine Totalordnung ist, lässt sich leicht nachprüfen. □

Lemma 4. *Sei A eine beliebige Menge und*

$$S := \{(X, R) \mid X \subseteq A \wedge R \textit{ ist Wohlordnung auf } X\}$$

die Menge aller Wohlordnungen auf Teilmengen von A. Sei weiters $W := S/\sim$, wobei $\sim$ die Isomorphie von Wohlordnungen bezeichnet. Dann ist W mit der "Einbettungsrelation" $\preceq$ aus Satz 4 eine Wohlordnung.

Beweis. Das $(W, \preceq)$ ist nach Satz 4 totalgeordnet. Für jede Teilmenge X von W gibt es ein Klasse $\overline{S} \in W$ mit $\overline{A} \preceq \overline{S}$ für alle $\overline{A}$ aus W. Die Menge der Anfangsabschnitte einer Wohlordnung ist wohlgeordnet (da jeder Anfangsabschnitt eindeutig durch das Minimum des Kompliments festgelegt ist), also hat X ein Minimum und W ist eine Wohlordnung. □

Satz 5 (Beispiel 9). *Zu jeder Menge A gibt es eine Wohlordnung W so, dass es keine injektive Abbildung $f : W \to A$ gibt.*

Beweis. Sei W wie im obigen Lemma definiert. Angenommen $f : W \to A$ ist injektiv. Sei $T := f(W) \subseteq A$. Dann ist $(T, \leq)$ mit

$$f(\overline{X}) \leq f(\overline{Y}) :\Leftrightarrow \overline{X} \preceq \overline{Y}$$

eine Wohlordnung. $g : W \to T : \overline{X} \mapsto T_{<f(\overline{X})}$ ist ein Ordnungsisomorphismus. Da T selbst Wohlordnung ist muss es ein Element $\overline{Z}$ aus W geben mit $T \in \overline{Z}$. Daraus folgt $T \sim g(\overline{Z}) \subset T$. T wäre zu einem echten Anfangsabschnitt von sich selbst isomorph, was nach Lemma 2 unmöglich ist. □

Alle bisherigen Sätze lassen sich auch den ZF-Axiomen ohne Auswahlaxiom beweisen. Nun werden wir das Auswahlaxiom (AC, Axiom of Choice) hinzunehmen, und dazu äquivalente Aussagen betrachten.

AC und äquivalente Aussagen

Es wird gezeigt, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. **Auswahlaxiom:**

   $$\forall X \exists f : \mathcal{P}(X) \to X \,[\forall Y \,(Y \subseteq X \land Y \neq \emptyset \Rightarrow f(Y) \in Y)]$$

   Etwas weniger formal: Sei A eine Menge von nichtleeren Mengen, dann gibt es eine Funktion $f : A \to \bigcup_{X \in A} X$ (genannt Auswahlfunktion), so dass jedem $X \in A$ eine Element aus $x \in X$ zugeordnet wird: $\forall X \in A : f(X) \in X$.
   (Die zwei Formulierungen unterscheiden sich zwar etwas, sind aber äquivalent.)

   "The Axiom of Choice is necessary to select a set from an infinite number of socks, but not an infinite number of shoes." – Bertrand Russell

2. **Hausdorffsches Maximalitätsprinzip:** Ist $(H, \leq)$ eine beliebige Halbordnung und $h \in H$, so gibt es eine maximale Kette $K \subseteq H$ mit $h \in K$.
   (Eine Kette wird maximal genannt, wenn jede echte Obermenge keine Kette ist.)

3. **Lemma von Zorn:** Gibt es in einer Halbordnung $(H, \leq)$ zu jeder Kette eine obere Schranke, so gibt es zu jedem $h \in H$ ein maximales Element $m \geq h$ in H. (m maximal zu $h \Leftrightarrow h \leq m \land \nexists x \in H : h \leq x \land m \leq x$)

4. **Wohlordnungssatz:** Auf jeder Menge A gibt es eine Relation $\leq$, so dass $(A, \leq)$ eine Wohlordnung ist.

   "The Axiom of Choice is obviously true, the well-ordering principle obviously false, and who can tell about Zorn's lemma?" – Jerry Bona

5. Zu je zwei Mengen A und B gibt es eine injektive Funktion $f : A \to B$ oder $f : B \to A$.

Satz 6 (Beispiel 10: Maximalitätsprinzip). *1. ⇒ 2.*

Beweis. Der Beweis wird indirekt geführt: Angenommen es gibt zu $h \in H$ keine maximale Kette. Sei g eine Auswahlfunktion auf dem System aller nichtleeren Teilmengen und $(W, \leq)$ eine Wohlordnung, von der aus es keine injektive Funktion nach H gibt (siehe Satz 5).

Eine Funktion $f : W \to H$ sei definiert durch $f(\min W) := h$ und mittels transfiniter Rekursion für jedes weitere $w \in W$ durch

$$A_w := \{a \in H \setminus f(W_{<w}) \mid \forall x \in f(W_{<w}) : x \leq a \lor a \leq x\},$$

$$f(w) := g\,(A_w).$$

Die Definition ist sinnvoll, denn wäre A_w für ein $w \in W$ leer, dann wäre $f(W_{<w})$ eine maximale Kette.

f ist offensichtlich injektiv. Widerspruch. □

Satz 7 (Beispiel 11: Lemma von Zorn). *2. $\Rightarrow$ 3.*

Beweis. Sei K eine maximale Kette mit $h \in K$. Die Kette ist laut Voraussetzung beschränkt durch ein Element m. Liegt nun m nicht in K, so wäre auch $K \cup \{m\}$ eine Kette, Widerspruch zu K maximal. Also muss $m \in K$ und $\forall k \in K : k \leq m$ gelten, also m maximal sein. $\square$

Satz 8 (Beispiel 12: Wohlordnungsatz). *3. $\Rightarrow$ 4*

Beweis. Sei, wie in Lemma 4,

$$S := \{(X, R) \mid X \subseteq A \wedge R \text{ ist Wohlordnung auf } X\}$$

die Menge aller Wohlordnungen auf Teilmengen von A. Auf S sei eine Halbordnung $\sqsubseteq$ definiert durch

$$(X_1, R_1) \sqsubseteq (X_2, R_2) :\Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 \wedge R_2|_{X_1} = R_1 \wedge X_1 \preceq X_2.$$

Sei $((X_i, R_i))_{i \in I}$ eine Kette aus $(S, \sqsubseteq)$ und $X := \bigcup_{i \in I} X_i$. Da es zu je zwei $a, b \in X$ ein X_i geben muss, in dem beide Elemente liegen, lässt sich auf X eine Wohlordnung R definieren, so dass $\forall i \in I : (X_i, R_i) \sqsubseteq (X, R)$ gilt. (X, R) ist dann obere Schranke der Kette.

Auf $(S, \sqsubseteq)$ lässt sich somit das Lemma von Zorn anwenden, es existiert also eine maximale Wohlordnung (X, R). Wenn $X \neq A$ wäre, dann ist auch (X', R') mit $X' := X \cup \{a\}$ für ein beliebiges $a \in A \setminus X$ und $R' := R \cup \{(x, a) \mid x \in X'\}$ eine Wohlordnung. Es folgt $(X, R) \sqsubseteq (X', R')$. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von (X, R). Daher muss $X = A$ gelten, es gibt also eine Wohlordnung auf A. $\square$

Satz 9 (Beispiel 13). *4. $\Rightarrow$ 1.*

Beweis. (Weniger formale Definition wird verwendet.) Nach dem Wohlordungssatz kann man eine Wohlordung auf $\bigcup_{X \in A} X$ einführen. Mit dieser sind dann alle Mengen in A wohlgeordnet und man kann eine Auswahlfunktion f definieren durch

$$f(X) := \min X$$

$\square$

Satz 10. *4. $\Leftrightarrow$ 5.*

Beweis.
"$\Rightarrow$": A und B lassen sich wohlordnen, daher muss nach Satz 4 $A \preceq B$ oder $B \preceq A$ gelten. Der entsprechnde "Einbettungsisomorphismus" ist dann eine injektive Abbildung $A \to B$ bzw. $B \to A$.

"$\Leftarrow$": Zu A gibt es eine Wohlordung $(W, \leq)$ von der aus es keine injektive Abbildung nach A gibt (Satz 5). Es muss also eine injektive Abbildung $f : A \to W$ existieren. Damit sei eine Ordnung $\leq_f$ auf A definiert durch

$$a \leq_f b :\Leftrightarrow f(a) \leq f(b).$$

$(A, \leq_f)$ ist eine Wohlordnung. $\square$