Galoisverbindungen

Mitschrift zur Vorlesung von Prof. Eigenthaler

Clemens Koppensteiner[1]

Version 1.3
8. November 2007

Zusammenfassung

Dies ist – bis auf Umordnung und kleine Änderungen – eine Mitschrift zur Vorlesung "Galoisverbindungen", die Ao.Univ.Prof. Dr. Günther Eigenthaler im Wintersemester 2006 an der TU Wien hielt. Der Inhalt dieses Textes wurde von ihm korrigiert.

Ich bin natürlich für weitere Fehlerkorrekturen sehr dankbar.

Zuerst wird etwas universelle Algebra für die spätere Verwendung studiert, dann werden Galoisverbindungen und Hüllensysteme allgemein betrachtet, und schließlich wird auf einige spezielle Verbindungen näher eingegangen.

Die aktuelle Version dieses Dokumentes und seines Quelltextes sind unter

`http://www.caramdir.at/math.html`

abrufbar.

[1] `clemens.koppensteiner@student.tuwien.ac.at`

Inhaltsverzeichnis

1 Etwas universelle Algebra

Zuerst eine notationelle Anmerkung: An manchen Stellen wird eine Familie als Menge betrachtet oder eine Menge als Familie, ohne in der Notation entsprechend darauf zu achten. Während das formal natürlich falsch ist, sollte klar sein, was gemeint ist (notfalls kann man die Menge ja mit sich selbst indizieren).

Da die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen nicht so ganz einheitlich verwendet wird, werde ich an den Stellen, wo eine Unterscheidung notwendig ist, $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ und $\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, \dots\}$ verwenden.

Wir werden uns nun mit einigen grundlegenden Begriffen auseinandersetzen, die in den folgenden Abschnitten immer wieder benötigt werden. Der Inhalt der Grundvorlesung "Algebra" wird vorausgesetzt.

Definition 1.1. Mit $F_k(A) := A^{A^k} = \{f : A^k \to A\}$ wird die Menge der k-stelligen Funktionen (Operationen) auf A bezeichnet. In der Literatur sind auch $F(A)_k$, $\mathrm{Op}_k(A)$ und $O_k(A)$ geläufig.

Alle endlichstelligen Funktionen auf A werden mit $F(A) := \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k(A)$ bezeichnet. Gleiches bedeuten auch $\mathrm{Op}(A)$ und $O(A)$.

Definition 1.2. Für $k \in \mathbb{N}^*$ und $1 \le n \le k$ heißt die Funktion

$$\xi_n^{(k)} : \begin{cases} A^k & \to & A \\ (a_1, \dots, a_k) & \mapsto & a_n \end{cases}$$

eine *k-stellige Projektion* auf die n-te Komponente.

Die Menge aller Projektionen auf A wird bezeichnet mit

$$\mathrm{Pr}(A) := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \xi_1^{(k)}, \dots, \xi_k^{(k)} \right\}.$$

1.1 Universelle Algebren

Definition 1.3 (Universelle Algebra)**.** Für eine beliebige Menge A und eine Familie $\Omega = (\omega_i)_{i \in I}$ von n_i-stelligen Operationen auf A ($n_i \in \mathbb{N}_0$) heißt das Paar $\mathfrak{A} := (A, \Omega)$ eine *universelle Algebra vom Typ* $(n_i)_{i \in I}$ auf A.

Definition 1.4 (Unteralgebra)**.** Eine Teilmenge $T \subseteq A$ heißt *Unteralgebra* (engl. subuniverse) von $\mathfrak{A}$, wenn sie bezüglich aller Operationen aus Ω abgeschlossen ist. Mit der Bezeichnung $\omega_i^* = \omega_i|_{T^{n_i}}$ ist $\mathfrak{T} := (T, (\omega_i^*)_{i \in I})$ wieder eine Algebra vom Typ $(n_i)_{i \in I}$. $\mathfrak{T}$ wird ebenfalls als *Unteralgebra* (engl. subalgebra) von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Man schreibt meist $\omega_i = \omega_i^*$. Die Menge aller Unteralgebren von $\mathfrak{A}$ wird mit $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$ bezeichnet.

Satz 1.5. $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$ *ist ein vollständiger Verband.*

Definition 1.6. Sei $S \subseteq A$. Dann bezeichnet $\langle S \rangle$ die von S *erzeugte Unteralgebra* von $\mathfrak{A}$:

$$\langle S \rangle := \bigcap \{T \in \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A} \mid S \subseteq T\}.$$

Satz 1.7. *Sei für jede Teilmenge $T \subseteq A$ die Menge*

$$E(T) := \{\omega_i x_1 \dots x_{n_i} \mid i \in I,\ x_1, \dots, x_{n_i} \in T\}$$

definiert und $E^{k+1}(T) := E(E^k(T))$, $E^0(T) = T$. Dann ist

$$\langle S \rangle = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(S).$$

Beweis. Es ist $S \subseteq \langle S \rangle \in \operatorname{Sub} \mathfrak{A}$, also $E(S) \subseteq \langle S \rangle$. Mit vollständiger Induktion folgt $E^k(S) \subseteq \langle S \rangle$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und daher auch $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(S) \subseteq \langle S \rangle$.

Umgekehrt ist $S \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(S)$, also bleibt zu zeigen, dass $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(S) \in \operatorname{Sub} \mathfrak{A}$ ist. Dies ist klarerweise der Fall. □

Für eine Mengenfamile $(A_j)_{j \in J}$ ist das kartesische Produkt formal definiert durch

$$\prod_{j \in J} A_j := \{(a_j)_{j \in J} \mid a_j \in A_j\} = \left\{ f \colon J \to \bigcup_{j \in J} A_j \;\middle|\; f(j) = a_j \in A_j \right\}.$$

Die beiden Zugänge sind äquivalent, in konkreten Fällen kann aber einer formal von Vorteil sein.

Beispiele. Für eine endliche Indexmenge $J = \{1, \dots, n\}$ schreibt sich das Mengenprodukt als $A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_j \in A_j\}$. Sind alle $A_j = A$, so ist oft die Mengeninterpretation von Vorteil: $\prod_{j \in J} A = A^J = \{f \colon J \to A\}$.

Definition 1.8 (Direktes Produkt)**.** Seien $\mathfrak{A}_j = (A_j, \Omega_j)$ $(j \in J)$ universelle Algebren vom Typ $(n_i)_{i \in I}$ mit Operationen $\Omega_j = (\omega_i^{(j)})_{i \in I}$. Dann ist das *direkte Produkt* dieser Algebren jene Algebra (P, Ω) auf $P := \prod A_j$ von Typ $(n_i)_{i \in I}$, deren Operationen $\Omega = (\omega_i)_{i \in I}$ durch

$$\omega_i (a_1^{(j)})_{j \in J} \dots (a_{n_i}^{(j)})_{j \in J} := \left(\omega_i^{(j)} a_1^{(j)} \dots a_{n_i}^{(j)} \right)_{j \in J}$$

definiert werden.

Diese Definition in Funktionenschreibweise lautet

$$(\omega_i f_1 \dots f_{n_i})(j) := \omega_i^{(j)} f_1(j) \dots f_{n_i}(j) \quad \forall j \in J.$$

1.2 Kongruenzrelationen

Die Menge aller Äquivalenzrelationen auf einer Menge A sei bezeichnet durch $\operatorname{Eq} A$, die Menge aller Kongruenzrelationen auf einer Algebra $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$ durch $\operatorname{Con} \mathfrak{A}$. Für $\Theta \in \operatorname{Eq} A$ und $a \in A$ bezeichnet $[a]_\Theta$ die Äquivalenzklasse von a.

Sei nun $\Theta \in \operatorname{Con} \mathfrak{A}$, $\omega_i \in \Omega$ mit Stelligkeit n_i. Für $n_i = 0$ ist, wegen der Reflexivität von Θ, $\omega_i \Theta \omega_i$, also $(\omega_i, \omega_i) \in \Theta$. Ist $n_i > 0$, so ist mit $a_1 \Theta b_1, \dots, a_{n_i} \Theta b_{n_i}$ auch $\omega_i a_1 \dots a_{n_i} \Theta \omega_i b_1 \dots b_{n_i}$. Anders geschrieben also mit $(a_1, b_1), \dots, (a_{n_i}, b_{n_i})$ aus Θ auch $(\omega_i a_1 \dots a_{n_i}, \omega_i b_1 \dots b_{n_i}) = \omega_i (a_1, b_1) \dots (a_{n_i}, b_{n_i}) \in \Theta$. Es ist daher $\Theta \in \operatorname{Sub}(A \times A, \Omega)$. Umgekehrt müssen aber nicht alle Unteralgebren von

$(A \times A, \Omega)$ auch Kongruenzrelationen auf $\mathfrak{A}$ sein, da für Unteralgebren Reflexivität, Symmetrie und Transitivität nicht gegeben sein müssen.

Eine genauere Charakterisierung gibt der folgende Satz:

Satz 1.9. *Sei $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$ eine universelle Algebra. Dann gibt es eine Operationenfamilie Ω^*, so dass* $\operatorname{Con}\mathfrak{A} = \operatorname{Sub}(A \times A, \Omega^*)$ *ist.*

Beweis. Auf $A \times A$ seien folgende Operationen definiert:

$$s\colon \begin{cases} A \times A & \to & A \times A \\ (x, y) & \mapsto & (y, x) \end{cases}$$

und

$$t\colon \begin{cases} (A \times A)^2 & \to & A \times A \\ ((x_1, y_1),\ (x_2, y_2)) & \mapsto & \begin{cases} (x_1, y_2) & \text{, falls } y_1 = x_2 \\ (x_1, y_1) & \text{, sonst} \end{cases} \end{cases} .$$

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ ist genau dann symmetrisch, wenn sie Unteralgebra von $(A \times A, s)$ ist, und genau dann transitiv, wenn sie Unteralgebra von $(A \times A, t)$ ist. Ω^* sei nun Ω erweitert um s, t und die nullstelligen Operationen (a, a), $a \in A$. □

Man kann die Kongruenzen einer Algebra aber auch als die Kongruenzen einer *unären Algebra*, d.h. einer Algebra mit nur einstelligen Operationen, darstellen.

Definition 1.10 (Translation)**.** Sei ω eine n-stellige Operation auf A und $1 \leq k \leq n$. Fixiert man nun beliebige Elemente $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n \in A$, dann heißt die Abbildung

$$\begin{cases} A & \to & A \\ x & \mapsto & \omega a_1 \dots a_{k-1} x a_{k+1} \dots a_n \end{cases}$$

eine *Translation.*

Für eine Familie Ω von Operationen auf A wird die Menge aller Translationen, die sich mit Operationen aus Ω bilden lassen, mit $T(\Omega)$ bezeichnet.

Satz 1.11. *Sei $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$ eine universelle Algebra vom Typ $(n_i)_{i \in I}$. Dann ist* $\operatorname{Con}\mathfrak{A} = \operatorname{Con}(A, T(\Omega))$.

Beweis. Sei $\Theta \in \operatorname{Con}\mathfrak{A}$, $i \in I$, $1 \leq k \leq n_i$ und $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_{n_i} \in A$ beliebig. Dann gilt aufgrund der Reflexivität $a_j \Theta a_j\ \forall j$. Unter der Vorraussetzung $x \Theta y$ gilt somit, da $\Theta \in \operatorname{Con}\mathfrak{A}$, auch $\omega_i a_1 \dots x \dots a_{n_i} \Theta \omega_i a_1 \dots y \dots a_{n_i}$. Somit ist $\Theta \in \operatorname{Con}(A, T(\Omega))$.

Sei umgekehrt $\Theta \in \operatorname{Con}(A, T(\Omega))$ und $a_1 \Theta b_1, \dots, a_{n_i} \Theta b_{n_i}$. Dann folgt

$$\omega_i a_1 \dots a_{n_i} \Theta \omega_i b_1 a_2 \dots a_{n_i} \Theta \omega_i b_1 b_2 a_3 \dots a_{n_i} \Theta \dots \Theta \omega_i b_1 \dots b_{n_i}$$

und aufgrund der Transitivität von Θ:

$$\omega_i a_1 \dots a_{n_i} \Theta \omega_i b_1 \dots b_{n_i}.$$

□

Definition 1.12. Seien $\Theta, \Psi \in \mathrm{Eq}(A)$ mit $\Psi \subseteq \Theta$. Dann definiert man

$$\Theta/\Psi := \{([a]_\Psi, [b]_\Psi) \mid (a,b) \in \Theta\} \in \mathrm{Eq}(A/\Psi).$$

Satz 1.13 (Isomorphiesatz)**.** *Seien* $\Theta, \Psi \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A})$ *mit* $\Psi \subseteq \Theta$. *Dann gilt*

$$(\mathfrak{A}/\Psi)/(\Theta/\Psi) \cong \mathfrak{A}/\Theta.$$

1.3 Terme und Termfunktionen

Definition 1.14 (Terme)**.** Gegeben sei eine "abstrakte" Famile $\Omega = (\omega_i)_{i\in I}$ mit paarweise verschiedenen Elementen, ein *Typ* $(n_i)_{i\in I}$ mit $n_i \in \mathbb{N}_0$ und eine Menge X von *Variablen*[2], so dass $\Omega \cap X = \emptyset$. Die Mengen $T_n(X)$ seien induktiv definiert durch

$$T_0(X) := X \cup \{\omega_i \mid i \in I,\ n_i = 0\} \quad \text{und}$$

$$T_{n+1}(X) := T_n(X) \cup \{\omega_i t_1 \dots t_{n_i} \mid i \in I,\ n_i > 0,\ t_j \in T_n(X)\}.$$

Dann heißen die Elemente von

$$T(X) := \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n(X)$$

Terme. Genauer nennt man die Terme in $T_n \setminus T_{n-1}$ *Terme der Stufe* n.

Beispiel. Sei $\Omega = (\cdot, e, ^{-1})$ vom Typ $(2,0,1)$ und $X = \{x,y\}$. Dann sind y und e Beispiele für Terme der Stufe 0, $x \cdot y$ eines für Stufe 1 und $x \cdot x^{-1}$ eines für Stufe 2. Hingegen ist $^{-1} \cdot y$ kein Term.

Definition 1.15 (Termalgebra)**.** Aus der Menge $T(X)$ kann man mit der Familie Ω in offensichtlicher Weise eine Algebra $(T(X), \Omega)$ vom Typ $(n_i)_{i\in I}$ machen, indem man die Operationen als formale Verkettung von Termen wie oben definiert. Man nennt so eine Algebra *Termalgebra*.

Man hat dann also

$$\omega_i t_1 \dots t_{n_i} := \omega_i t_1 \dots t_{n_i},$$

wobei das erste ω_i die Operation in der Termalgebra und das zweite ω_i das "formale" Operationssymbol aus der ursprünglichen Familie Ω bezeichnet. Wie üblich, machen wir auch hier keinen notationellen Unterschied zwischen den beiden eigentlich unterschiedlichen Verwendungen von ω_i.

Anmerkung 1.16. Die Algebra $(T(X), \Omega)$ ist durch X erzeugt.

Lemma 1.17 (Eindeutigkeit)**.** *Es sei* $t = \omega_i t_1 \dots t_{n_i} \in T(X)$ *ein Term, der auch gleich* $\omega_j s_1 \dots s_{n_j}$ *ist. Dann gilt* $i = j$ *und* $t_k = s_k$ *für alle* $k = 1, \dots, n_i$. *Außerdem ist* $t \neq x$ *für alle* $x \in X$.

Satz 1.18. *Sei* $(T(X), \Omega)$ *eine Termalgebra,* (A, Ω') *eine Algebra vom selben Typ und* $\varphi : X \to A$ *eine beliebige Abbildung. Dann gibt es genau einen Homomorphismus* $\bar{\varphi} : T(X) \to A$, *der* φ *fortsetzt.*

[2]Es würde meist $|X| \leq \aleph_0$ genügen.

Beweis. Es kann höchstens eine Fortsetzung geben, da φ auf einem Erzeugendensystem von $T(X)$ vorgegeben ist.

Auf $T_0(X)$ ist $\bar{\varphi}$ durch φ und die Homomorphieeigenschaft festgelegt: $\bar{\varphi}|_X := \varphi$ und $\bar{\varphi}(\omega_i) := \omega_i'$.

Sei nun $\bar{\varphi}$ auf $T_n(X)$ definiert, $\omega_i \in \Omega$ mit $n_i > 0$ und $t_1, \ldots, t_{n_i} \in T_n(X)$, dann muss wegen der Homomorphieeigenschaft

$$\bar{\varphi}(\omega_i t_1 \ldots t_{n_i}) := \omega_i' \bar{\varphi}(t_1) \ldots \bar{\varphi}(t_{n_i})$$

gelten. $\bar{\varphi}$ ist aufgrund des vorigen Lemmas wohldefiniert und offensichtlich ein Homomorphismus. □

Anmerkung 1.19. Häufig werden wir für Algebren des gleichen Typs die gleichen Operationssysmbole verwenden. In diesem Fall hätten wir also anstatt ω_i' auch ω_i geschrieben. Die Bedeutung muss sich dann aus dem Kontext ergeben.

Hat man bereits eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$, so kann man daraus die Produktalgebra $(A^{A^k}, \Omega) = (F_k(A), \Omega)$ bilden. Von dieser Algebra ist eine besondere Unteralgebra von Interesse:

Definition 1.20 (Termfunktionen)**.** Für $k \in \mathbb{N}^*$ sei

$$T_k(A, \Omega) := \left\langle \xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_k^{(k)} \right\rangle \leq (F_k(A), \Omega)$$

die von den Projektionen gebildete Unteralgebra. Weiters sei[3]

$$T(A, \Omega) := \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k(A, \Omega).$$

Die Elemente in $T(A, \Omega)$ heißen *Termfunktionen.*

Aus Satz 1.18 folgt unmittelbar

Korollar 1.21. *Sei $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $\psi\colon (T(X), \Omega) \to (T_k(A, \Omega), \Omega)$ mit $\psi(x_i) = \xi_i^{(k)}$.*

Anmerkung 1.22. Sei $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Gibt man den Homomorphismus aus Satz 1.18 durch $\varphi(x_j) = a_j \in A$ vor, so schreibt man für $t \in T(X)$ suggestiv $t(a_1, \ldots, a_k) := \bar{\varphi}(t)$. Es wird dadurch eine Termfunktion

$$A^k \to A : (a_1, \ldots, a_k) \mapsto t(a_1, \ldots, a_k)$$

vermittelt.

Für den Homomorphismus ψ aus Korollar 1.21 hat man $\psi(t)(a_1, \ldots, a_k) = t(a_1, \ldots, a_k)$. Man nennt dies das *Einsetzungsprinzip* und schreibt oft $\psi(t) = t$.

Satz 1.23. *Sei (A, Ω) eine Algebra und $S \subseteq A$. Dann gilt*

$$\langle S \rangle := \left\{ t(s_1, \ldots, s_k) \;\middle|\; t \in T(\{x_1, \ldots, x_k\}),\ k \in \mathbb{N}_0,\ s_1, \ldots, s_k \in S \right\}.$$

[3] Die Vereinigung soll disjunkt sein.

Beweis. Vgl. Satz 1.7. □

Für $t \in T(\{x_1, \dots, x_k\}) \subseteq T(X)$ schreibt man oft $t = t(x_1, \dots, x_k)$.

Satz 1.24. *Seien (A, Ω), (B, Ω) und $T(X)$ vom selben Typ, $\varphi\colon A \to B$ ein Homomorphismus und $t \in T(\{x_1, \dots, x_k\})$. Dann gilt für alle $a_1, \dots, a_k \in A$*

$$\varphi(t(a_1, \dots, a_k)) = t(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)).$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Stufe von t. Für $t = x_j$ ist $t(a_1, \dots, a_k) = a_j$ und $t(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)) = \varphi(a_j)$. Für $t = \omega_i$ mit $n_i = 0$ ist $t(a_1, \dots, a_k) = \omega_i \in A$ und $t(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)) = \omega_i \in B$.

Sei nun $t = \omega_i t_1 \dots t_{n_i}$, wobei die Behauptung für $t_1, \dots, t_{n_i}$ bereits gelte. Es folgt mit Hilfe von Einsetzungshomomorphismen nach A bzw. B:

$$\begin{aligned}
\varphi(t(a_1, \dots, a_k)) &= \varphi(\omega_i t_1(a_1, \dots, a_k) \dots t_{n_i}(a_1, \dots, a_k)) \\
&= \omega_i \varphi(t_1(a_1, \dots, a_k)) \dots \varphi(t_{n_i}(a_1, \dots, a_k)) \\
&= \omega_i t_1(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)) \dots t_{n_i}(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)) \\
&= t(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)).
\end{aligned}$$

□

Definition 1.25 (Polynomfunktionen)**.** Für $k \in \mathbb{N}^*$ sei

$$P_k(A, \Omega) := \left\langle \left\{ \xi_1^{(k)}, \dots, \xi_k^{(k)} \right\} \cup A_{(k)} \right\rangle \leq (F_k(A), \Omega),$$

wobei $A_{(k)} = \left\{ a_{(k)} \mid a \in A \right\}$ die Elemente aus A aufgefasst als k-stellige konstante Funktionen $(a_1, \dots, a_k) \mapsto a$ sind. Weiters sei[4]

$$P(A, \Omega) := \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k(A, \Omega).$$

Die Elemente in $P(A, \Omega)$ heißen *Polynomfunktionen*.

Beispiele. Für den Körper $\mathbb{R}$ (also $(A, \Omega) = (\mathbb{R}, +, 0, -, \cdot, 1)$) ist $T_k(A, \Omega) \cong \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]$ und $P_k(A, \Omega) \cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_k]$.

Hingegen sind für $(A, \Omega) = (\mathbb{Z}_p, +, 0, -, \cdot, 1)$ die Algebra $T_k(A, \Omega)$ und der Polynomring $\mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_k]$ nicht isomorph, da erstere (wie auch $P_k(A, \Omega)$) aufgrund der Lagrange-Interpolation gleich $F_k(\mathbb{Z}_p)$ ist und daher insbesondere endliche Mächtigkeit hat, während zweiterer abzählbar unendlich ist. Für $k = 1$ gilt speziell:

$$P_1(\mathbb{Z}_p, \Omega) = T_1(\mathbb{Z}_p, \Omega) = \left\{ a_0 + a_1 \xi + \dots + a_{p-1} \xi^{p-1} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Z}_p \right\} = F_1(\mathbb{Z}_p),$$

wobei ξ die identische Abbildung bezeichnet und die letzte Gleichheit wieder aufgrund der Lagrange-Interpolation gilt.

[4]Die Vereinigung soll wieder disjunkt sein.

Definition 1.26 (primal, polynomvollständig, termäquivalent)**.** Eine Algebra (A, Ω) heißt

- *primal*[5], wenn $F(A) = T(A, \Omega)$;
- *polynomvollständig*[6], wenn $F(A) = P(A, \Omega)$.

Zwei Algebren (A, Ω) und (A, Φ) heißen *termäquivalent*, wenn $T(A, \Omega)$ und $T(A, \Phi)$ übereinstimmen.

Beispiele. Jeder endliche Primkörper ist primal.

Jedes Galois-Feld $GF(p^t)$ ist wegen der Lagrange-Interpolation polynomvollständig, falls $t > 1$ aber nicht primal.

Boolesche Algebren und Boolesche Ringe sind termäquivalent.

Die Boolesche Algebra $(\{0, 1\}, \wedge, \vee, 0, 1,')$ ist primal, da $(\mathbb{Z}_2, +, 0, -, \cdot, 1)$ primal ist.

$(\{0, 1\}, |)$ ist primal, wobei $a \mid b := (a \wedge b)'$. Man nennt $|$ den *Shefferstrich.* Aus ihm lassen sich alle logischen Operationen aufbauen. Auch daraus erkennt man, dass $(\{0, 1\}, \wedge, \vee, 0, 1,')$ primal ist.

Wir sammeln noch einige Eigenschaften polynomvollständiger Algebren:

Proposition 1.27.

- *Ist Ω endlich und (A, Ω) polynomvollständig, dann ist A endlich.*
- *Ist die Algebra (A, Ω) polynomvollständig, so ist sie einfach, d.h. sie hat nur die trivialen Kongruenzen.*
- *Eine Gruppe $(G, \cdot, e,^{-1})$ mit $|G| > 1$ ist polynomvollständig genau dann, wenn sie endlich, einfach und nicht abelsch ist.*

[5] auch: termfunktional vollständig
[6] auch: (polynom-)funktional vollständig

2 Galoisverbindungen

2.1 Hüllensysteme

Definition 2.1 (Hüllenoperator)**.** Ein *Hüllenoperator* auf einer Menge A ist eine Abbildung $\eta\colon \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(A)$, die für alle X, $X^* \in \mathfrak{P}(A)$ folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Monotonie: $X \subseteq X^* \Rightarrow \eta(X) \subseteq \eta(X^*)$,
2. Extensivität: $X \subseteq \eta(X)$,
3. Idempotenz: $\eta(\eta(X)) = \eta(X)$.

Beispiele.

- Sei (A, Ω) eine Algebra. Dann ist
$$\eta\colon \begin{cases} \mathfrak{P}(A) & \to & \mathfrak{P}(A) \\ S & \mapsto & \langle S \rangle \end{cases}$$
ein Hüllenoperator auf A.
- Sei $(A, \mathfrak{O})$ ein topologischer Raum. Dann bestimmt $\eta(X) := \overline{X}$ einen Hüllenoperator auf A.

Definition 2.2 (Hüllensystem)**.** Eine Teilmenge $\mathfrak{H}$ der Potenzmenge einer Menge A heißt *Hüllensystem* auf A, wenn für alle $\mathfrak{H}^* \subseteq \mathfrak{H}$ auch
$$\bigcap_{X \in \mathfrak{H}^*} X \in \mathfrak{H}$$
gilt.

Beispiele.

- Die Unteralgebren $\operatorname{Sub} \mathfrak{A}$ einer universellen Algebra $\mathfrak{A}$.
- Die abgeschlossenen Mengen in einem topologischen Raum.

Definition 2.3. Eine Mengensystem $\mathfrak{G}$ heißt (nach oben) *gerichtet*, wenn
$$\forall X, Y \in \mathfrak{G}\ \exists Z \in \mathfrak{G} : X \subseteq Z \wedge Y \subseteq Z.$$

Definition 2.4. Ein Mengensystem $\mathfrak{M}$ heißt *induktiv*, wenn für alle gerichteten Teilsysteme $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{M}$ auch $\bigcup \mathfrak{G}$ in $\mathfrak{M}$ enthalten ist.

Satz 2.5. *Für jedes induktive Hüllensystem $\mathfrak{H}$ über einer Menge A gibt es eine Operationenfamilie Ω auf A, so dass $\mathfrak{H} = \operatorname{Sub}(A, \Omega)$. Umgekehrt ist $\operatorname{Sub} \mathfrak{A}$ immer induktiv.*

Der Beweis wird in [1, Abschnitt 2.1] geführt.

Satz 2.6.

1. *Sei $\mathfrak{H}$ ein Hüllensystem auf A. Dann ist*

$$\eta_{\mathfrak{H}}\colon \begin{cases} \mathfrak{P}(A) & \to & \mathfrak{P}(A) \\ X & \mapsto & \bigcap\{X^* \in \mathfrak{H} \mid X^* \supseteq X\} \end{cases}$$

   ein Hüllenoperator auf A.

2. *Sei η ein Hüllenoperator auf A. Dann ist*

$$\mathfrak{H}_\eta = \{\eta(X) \mid X \subseteq A\}$$

   ein Hüllensytem auf A.

3. *Die Zuordnungen $\mathfrak{H} \mapsto \eta_{\mathfrak{H}}$ und $\eta \mapsto \mathfrak{H}_\eta$ vermitteln zueinander inverse Bijektionen.*

2.2 Galoisverbindungen

Definition 2.7 (Galoisverbindung)**.** Unter einer *Galoisverbindung* versteht man ein Paar (σ, τ) von Abbildungen

$$\sigma\colon \begin{cases} \mathfrak{P}(A) & \to & \mathfrak{P}(B) \\ X & \mapsto & \sigma(X) \end{cases}, \qquad \tau\colon \begin{cases} \mathfrak{P}(B) & \to & \mathfrak{P}(A) \\ Y & \mapsto & \tau(Y) \end{cases},$$

so dass für alle $X, X^* \in \mathfrak{P}(A)$ und $Y, Y^* \in \mathfrak{P}(B)$ gilt:

1. $X \subseteq X^* \Rightarrow \sigma(X) \supseteq \sigma(X^*)$,
   $Y \subseteq Y^* \Rightarrow \tau(Y) \supseteq \tau(Y^*)$ (Antitonie) und
2. $X \subseteq \tau\sigma(X)$, $Y \subseteq \sigma\tau(Y)$.

Lemma 2.8. *Seien $(V, \leq)$ und $(W, \leq)$ zwei verbandsgeordnete Mengen und $f\colon V \to W$ bijektiv. Dann sind äquivalent:*

1. *f ist Isomorphie von $(V, \wedge, \vee)$ nach $(W, \wedge, \vee)$.*
2. *f und f^{-1} sind monoton, d.h. $\forall x, y \in V : x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$.*

Satz 2.9. *Sei (σ, τ) eine Galoisverbindung zwischen A und B. Dann sind $\tau\sigma$ und $\sigma\tau$ Hüllenoperatoren auf A bzw. B mit den Hüllensystemen*

$$\mathfrak{H}_A := \{\tau(Y) \mid Y \subseteq B\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}_B := \{\sigma(X) \mid X \subseteq A\}.$$

Die Verbände $(\mathfrak{H}_A, \wedge, \vee)$ und $(\mathfrak{H}_B, \vee, \wedge)$ sind zueinander isomorph.

Man nennt zwei Verbände, die mit vertauschten Operationen zueinander isomorph sind, auch *dual isomorph.*

Im Beweis dieses Satzes werden auch folgende Tatsachen beweisen:

Lemma 2.10.

1. *$\sigma = \sigma\tau\sigma$, $\tau = \tau\sigma\tau$.*
2. *Die eingeschränkten Abbildungen $\sigma\colon \mathfrak{H}_A \to \mathfrak{H}_B$ und $\tau\colon \mathfrak{H}_B \to \mathfrak{H}_A$ sind bijektiv und zueinander invers.*

Definition 2.11. Die Mengen aus $\mathfrak{H}_A$ und $\mathfrak{H}_B$ heißen *Galois-abgeschlossen.*

Die Problemstellung ist zumeist, eine gute (interne) Charakterisierung der Galois-abgeschlossenen Mengen zu finden.

Satz 2.12. *Für eine Relation $R \subseteq A \times B$ seien die Abbildungen σ und τ gegeben durch*

$$\sigma(X) := \{y \in B \mid \forall x \in X : xRy\}\,,$$
$$\tau(Y) := \{x \in A \mid \forall y \in Y : xRy\}\,.$$

Dann ist (σ, τ) eine Galoisverbindung.

Beispiele.

- $A = B = H$ ein Hilbertraum, $R = \perp$.
  Dann ist $\sigma(X) = \tau(X) = X^{\perp}$. Die Hüllensysteme sind gegeben durch $\{N \subseteq H \mid N$ ist abgeschlossener Unterraum von $H\}$, und der Hüllenoperator durch $X \mapsto \overline{[X]}$. Der duale Isomorphismus zwischen den Hüllenverbänden ist $M \mapsto M^{\perp}$ und daher involutorisch.
- *Klassische Galoisverbindung:* Sei $K \leq E$ eine Körpererweiterung, $A := \mathrm{Gal}(E/K) := \{\varphi \in \mathrm{Aut}(E) \mid \varphi(a) = a\ \forall a \in K\}$, $B := E$ und $R \subseteq A \times B$ definiert durch $\varphi R a :\Leftrightarrow \varphi(a) = a$. Dann erhält man unter geeigneten Voraussetzungen als Galois-abgeschlossen Mengen die Zwischenkörper Z ($K \leq Z \leq E$) einerseits und die Untergruppen von $(\mathrm{Gal}(E/K), \circ)$ andererseits.

2.3 Eine einfache Anwendung: Begriffsverbände

Interpretiert man $A = G$ als eine Menge von "Gegenständen" und $B = M$ als eine Menge von "Merkmalen", dann macht es Sinn, sich folgende Relation anzuschauen: $R = I$ mit $gIm :\Leftrightarrow$ "der Gegenstand g hat das Merkmal m" (Inzidenzrelation).

Nimmt man nun den Hüllenverband auf G und ersetzt jede Galois-abgeschlossene Menge $X \subseteq G$ durch das Paar $(X, \sigma(X))$, so erhält man einen *Begriffsverband.* Ein solches Paar zugehöriger Galois-abgeschlossener Mengen nennt man einen *Begriff.* Die Begriffsverbände sind ein wesentliches Werkzeug der formalen Begriffsanalyse, die von Rudolf Wille und seiner Schule in Darmstadt entwickelt wurde. [4] ist ein einführendes Buch, und wie üblich liefert die Wikipedia unter `http://de.wikipedia.org/wiki/Formale_Begriffsanalyse` einen Überblick.

2.4 Eine weiteres Beispiel: Algebraische Geometrie

Sei $(p_i)_{i \in I}$ eine Familie von Polynomen in $x_1, \ldots, x_n$ über einem Körper K. Man betrachtet nun über K das algebraische Gleichungssystem

$$p_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad i \in I.$$

Genau jene Mengen aus K^n, die sich als Lösungsmenge eines solchen Systems definieren lassen, heißen *algebraische Varietäten.* Es macht nun Sinn, eine Relation R zwischen Punkten $(u_1, \ldots, u_n) \in K^n$ und Polynomen $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$ zu definieren durch

$$(u_1, \ldots, u_n) R p :\Leftrightarrow p(u_1, \ldots, u_n) = 0.$$

Auf der einen Seite hat man als Galois-abgschlossene Mengen natürlich die Varietäten, auf der anderen gewisse Ideale (siehe Hilbert'scher Nullstellensatz).

3 Clones

3.1 Einleitung

Definition 3.1. Man nennt eine Funktion $f\colon A \to A$ verträglich mit einer Relation $\Theta \in A^2$, falls mit $a\Theta b$ auch $f(a)\Theta f(b)$ gilt.

Beispiel. Eine Funktion $f \in A^A$ ist genau dann verträglich mit einer Ordnung $\leq$ auf A, wenn sie bezüglich dieser Ordnung monoton (isoton, ordnungstreu) ist.

Man erhält eine Galoisverbindung zwischen $\operatorname{Eq} A$ und $A^A = \{f\colon A \to A\}$ durch die Relation R mit $\Theta R f :\Leftrightarrow \Theta$ verträglich mit f. Die Galois-abgeschlossenen Teilmengen von $\operatorname{Eq} A$ sind dann $\operatorname{Con}(A, \Omega)$ mit $\Omega \subseteq F(A)$.

Wir wollen nun das Konzept der Verträglichkeit etwas ausweiten: Einerseits kann man (J-stellige) Relationen $\Theta \subseteq A^J$ (J beliebig) betrachten, andererseits Funktionen in mehreren Veränderlichen.

Definition 3.2. Eine Relation $\Theta \subseteq A^J$ und eine Funktion $f \in F_k(A)$ heißen *verträglich*, wenn gilt:

$$\left.\begin{array}{c} \left(a_j^{(1)}\right)_{j\in J} \in \Theta \\ \vdots \\ \left(a_j^{(k)}\right)_{j\in J} \in \Theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left(f(a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(k)})\right)_{j\in J} \in \Theta.$$

Wir werden im folgenden Clones als Teilmengen von $F(A)$ definieren. Um damit Algebra zu betreiben, benötigen wir aber zuerst eine (partielle) Operation auf $F(A)$:

Definition 3.3 (Komposition)**.** Für Funktionen $f \in F_k(A)$ und $g_1, \dots, g_k \in A^B$ ist $f \circ (g_1, \dots, g_k) = f(g_1, \dots, g_k) \in A^B$ definiert durch

$$f(g_1, \dots, g_k)(x) := f(g_1(x), \dots, g_k(x)) \quad \forall x \in B.$$

Für diese verallgemeinerte Komposition gilt ein Analogon zum Assoziativgesetz: Seien $f \in F_k(A)$, $g_1, \dots, g_k \in F_m(A)$ und $h_1, \dots, h_m \in A^B$, dann gilt

$$(f \circ (g_1, \dots, g_k)) \circ (h_1, \dots, h_m) = f \circ (g_1 \circ (h_1, \dots, h_m), \dots, g_k \circ (h_1, \dots, h_m)).$$

Man nennt dieses Gesetz das *Super-Assoziativgesetz.*

Sei M eine Menge von Kardinalzahlen und $\mathfrak{R} \subseteq \left\{\Theta \subseteq A^J \mid J \in M\right\}$ eine Menge von Relationen. Dann kann man mit der Verträglichkeitsrelation eine Galoisverbindung zwischen $\mathfrak{R}$ und $F(A)$ definieren. Die Abbildungen sind für $G \subseteq F(A)$ und $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}$ gegeben durch

$$G \mapsto \{\Theta \in \mathfrak{R} \mid \Theta \text{ verträglich mit allen } g \in G\} =: \operatorname{Inv}(G)$$

und

$$\mathfrak{S} \mapsto \{f \in F(A) \mid f \text{ verträglich mit allen } \Theta \in \mathfrak{S}\} =: \operatorname{Pol}(\mathfrak{S}).$$

Man nennt $\operatorname{Inv}(G)$ die *Invarianten* von G und $\operatorname{Pol}(\mathfrak{S})$ die *Polymorphismen* von $\mathfrak{S}$.

Beispiele.

- $\mathfrak{R} = \mathrm{Eq}(A)$. Dann ist $\mathrm{Inv}(G) = \mathrm{Con}(A, G)$.
- $\mathrm{Pol}(\{\leq\})$ sind die monotonen (isotonen, ordnungstreuen) Funktionen.
- Für $\Omega = (\omega_i)_{i\in I}$ sei $\Omega^* = \{\omega_i \mid i \in I,\ n_i > 0\}$. Fasst man $\mathrm{Sub}(A, \Omega)$ als Menge von einstelligen Relationen auf, so ist $\Omega^* \subseteq \mathrm{Pol}(\mathrm{Sub}(A, \Omega))$. Ebenso ist $\Omega^* \subseteq \mathrm{Pol}(\mathrm{Con}(A, \Omega))$.

3.2 Clones

Für jede Teilmenge C von $F(A)$ sei $C_k := C \cap F_k(A)$.

Definition 3.4 (Clone)**.** Eine Teilmenge C von $F(A)$ heißt *Clone* auf A, wenn gilt:

1. Aus $f \in C_k$ und $g_1, \dots, g_k \in C_m$ folgt $f(g_1, \dots, g_k) \in C_m$.
2. $\mathrm{Pr}(A) \subseteq C$.

Die Menge aller Clones auf A wird mit $\mathrm{Clo}(A)$ bezeichnet.

Der Begriff *Clone* ist Abkürzung für *closed network of functions* und hat nichts mit einem biologischen Klon zu tun.
Beispiele.

- $\mathrm{Pr}(A)$ ist der kleinste Clone auf A.
- $F(A)$ ist der größte Clone auf A.
- Über $\mathbb{R}$ ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}[x_1, \dots, x_k]$ der sogenannte *Polynomclone*.

Der Durchschnitt von Clones auf einer Menge A ist wieder ein Clone, d.h. die Menge aller Clones auf A bildet ein Hüllensystem auf A. $(\mathrm{Clo}(A), \cap, \vee)$ bildet also einen vollständigen Verband. Er ist sogar induktiv.

Ist A eine zweielementige Menge, so ist $\mathrm{Clo}(A)$ bereits abzählbar unendlich (der zugehörige Verband heißt *Post'scher Verband*), für eine dreielementige Menge ist $\mathrm{Clo}(A)$ sogar schon überabzählbar.

Definition 3.5 (Atom)**.** Sei $\mathfrak{V}$ ein Verband mit kleinstem und größtem Element. Die oberen Nachbarn des kleinsten Elements von $\mathfrak{V}$ heißen *Atome*, die unteren Nachbarn des größten Elements heißen *Koatome*. Wenn jedes Element (außer dem kleinsten) aus $\mathfrak{V}$ über einem Atom liegt, es also keine "direkt zum kleinsten Element absteigende" unendliche Kette gibt, nennt man $\mathfrak{V}$ *atomar*. Hat analog jedes Element (außer dem größten) ein Koatom über sich, heißt der Verband *koatomar*.

Die Atome in $(\mathrm{Clo}(A), \cap, \vee)$ heißen *minimale Clones*, die Koatome *maximale Clones*. Für endliches A ist der Verband atomar und koatomar, und es gibt nur endlich viele Atome und Koatome.

Für endliches A wurden die maximalen Clones von Rosenberg klassifiziert. Wir werden diese Klassifikation in Abschnitt 3.5 genauer betrachten.

3.3 Termfunktionen und Clones

In Abschnitt 1.3 haben wir $T(A,\Omega)$ als die Menge der Termfunktionen auf (A,Ω) definiert. Nun werden wir zeigen, dass Termfunktionen und Clones nur unterschiedliche Sichtweisen ein und derselben Sache sind (vgl. auch [2, Lemma 2]).

Anmerkung 3.6. Sei (A,Ω) eine universelle Algebra von Typ $(n_i)_{i\in I}$, $\omega_i \in \Omega$ mit $n_i > 0$, $h_1,\dots,h_{n_i} \in F_k(A)$, dann ist

$$\omega_i h_1 \dots h_{n_i} = \omega_i \circ (h_1,\dots,h_{n_i}),$$

wobei ω_i links als Operation in $(F_k(A),\Omega)$ aufgefasst wird und rechts als Operation in (A,Ω), also als Funktion $A^{n_i} \to A$.

Satz 3.7. *Für jede universelle Algebra (A,Ω) ist $T(A,\Omega)$ ein Clone auf A.*

Beweis. Die Projektionen auf A sind laut Definition in $T(A,\Omega)$ enthalten. Seien $f \in T_k(A,\Omega)$, $g_1,\dots,g_k \in T_m(A,\Omega)$. Zu zeigen ist $f(g_1,\dots,g_k) \in T_m(A,\Omega)$. Sei $G_k(A) := \{g \in F_k(A) \mid g(g_1,\dots,g_k) \in T_m(A,\Omega)\}$. Wir werden zeigen, dass $G_k(A)$ eine Unteralgebra von $(F_k(A),\Omega)$ ist, welche die Projektionen und damit auch $T_k(A,\Omega)$ umfasst.

Es gilt $\xi_i^{(k)}(g_1,\dots,g_k) = g_i \in T_m(A,\Omega)$ und deshalb $\xi_i^{(k)} \in G_k(A)$ für alle $i = 1,\dots,k$.

Sei $i \in I$ mit $n_i > 0$ und $h_1,\dots,h_{n_i} \in G_k(A)$. Dann folgt aufgrund Anmerkung 3.6 und dem Super-Assoziativgesetz:

$$(\omega_i h_1 \dots h_{n_i})(g_1,\dots,g_k) = (\omega_i(h_1,\dots,h_{n_i}))(g_1,\dots,g_k) =$$

$$= \omega_i(h_1(g_1,\dots,g_k),\dots,h_{n_1}(g_1,\dots,g_k)) =$$

$$= \omega_i \underbrace{h_1(g_1,\dots,g_k)}_{\in T_m(A,\Omega)} \dots \underbrace{h_{n_i}(g_1,\dots,g_k)}_{\in T_m(A,\Omega)} \in T_m(\Omega).$$

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass ω_i hier für verschiedene Operationen bzw. Abbildungen steht: Zuerst als Operation auf $F_k(A)$, dann als Abbildung $A^{n_i} \to A$ (also die ursprüngliche Operation auf A) und zuletzt als Operation auf $F_m(A)$. Für $n_i = 0$ gilt $\omega_i \in G_k(A)$, da $\omega_i \in T_m(A,\Omega)$ (ω_i jeweils als konstante Funktion aufgefasst). $\square$

Umgekehrt ist natürlich jeder Clone auch eine Termfunktionenalgebra: $C = T(A,C)$.

Korollar 3.8. *Auch $P(A,\Omega)$ ist ein Clone auf A.*

Beweis. $P(A,\Omega) = T(A,\Omega \cup A_{(1)})$, wobei $A_{(1)}$ die Menge aller konstanten einstelligen Funktionen ist (vgl. Definition 1.25). $\square$

Anmerkung 3.9. Als Clone wird $T(A,\Omega)$ von Ω erzeugt und $P(A,\Omega)$ von $\Omega \cup A_{(1)}$.

Ein wichtiges Werkzeug ist folgender Satz, welcher der Interpolationsformel von Lagrange nachempfunden ist. Vergleiche auch [1, S. 82f].

Satz 3.10 (Darstellungssatz von Post)**.** *Sei A endlich, $|A| \geq 2$. In A seien zwei verschiedene Elemente 0 und 1 ausgezeichnet. Des weiteren seien auf A die zweistelligen Operationen $+$ und $\cdot$ definiert, für die $x + 0 = 0 + x = x$, $x \cdot 1 = x$ und $x \cdot 0 = 0$ gelte. Es bezeichne χ_a die charakteristische Funktion von a, also*

$$\chi_a(x) := \begin{cases} 1 & , x = a \\ 0 & , \textit{sonst} \end{cases}.$$

Für $b_1, \ldots, b_m \in A$ seien das Summen- und Produktsymbol definiert durch:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i := (\cdots((b_1 + b_2) + b_3) + \cdots + b_m), \quad \prod_{i=1}^{m} b_i := (\cdots((b_1 \cdot b_2) \cdot b_3) \cdots b_m).$$

Sei $n \geq 1$ und die Menge A^n durchgezählt: $A^n = \{(a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \mid 1 \leq j \leq |A|^n\}$.

Sei nun $f \in F_n(A)$. Dann gilt

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{|A|^n} \left(f(a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \cdot \prod_{i=1}^{n} \chi_{a_{ij}}(x_i) \right).$$

Insbesondere ist $f \in P_n(A, (+, \cdot, (\chi_a)_{a \in A}))$ und die Algebra $(A, (+, \cdot, (\chi_a)_{a \in A}))$ polynomvollständig.

Beweis. Es genügt festzustellen, dass

$$\prod_{i=1}^{n} \chi_{a_{ij}}(x_i) = \begin{cases} 1 & , (x_1, \ldots, x_n) = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

und daher auf der rechten Seite immer genau der gewünschte Funktionswert stehen bleibt. □

Korollar 3.11 (Satz von Sierpinski)**.** *Jede Funktion $f \in F_n(A)$ ist als Komposition von höchstens zweistelligen Funktionen darstellbar. $F(A)$ wird als Clone auf A von $F_2(A)$ erzeugt.*

Diese Folgerung gilt auch für unendliches A, wie leicht einzusehen ist.

Wenn $A = GF(p^t)$ ein endlicher Körper ist, gilt für jedes $a \in A$

$$\chi_a(x) = \frac{\prod_{b \in A \setminus \{a\}} (x - b)}{\prod_{b \in A \setminus \{a\}} (a - b)} \in P_1(GF(p^t)).$$

Die Interpolationsformeln von Lagrange und Post stimmen hier also überein. Außerdem sieht man noch einmal, dass $GF(p^t)$ polynomvollständig ist.

Wenn A unendlich ist, können Funktionen mit dem Darstellungssatz von Post an endlich vielen Stellen durch eine Polynomfunktion interpoliert werden. Für einen Körper ergibt sich wiederum die Formel von Lagrange.

3.4 Die Galoisverbindung

Am Ende von Abschnitt 3.1 haben wir bereits eine Galoisverbindung zwischen Relationen und $F(A)$ definiert. Wir wollen nun eine eingeschränkte Variante genauer betrachten.

Für den gesamten Abschnitt sei A eine endliche Menge. Alle endlichstelligen Relationen auf A werden mit $R(A) := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{P}(A^k)$ bezeichnet.

Man kann jede k-stellige Funktion $f \colon A^k \to A$ als die $k+1$-stellige Relation $\{(x_0, \dots, x_k) \mid x_0 = f(x_1, \dots, x_k),\ x_i \in A\}$ auffassen (den Graphen der Funktion). Umgekehrt ist jede Relation $R \subseteq A^I$ als Menge von Funktionen $I \to A$ auffassbar. Insbesondere werden wir $I = \{1, \dots, k\}$ haben.

Wie schon in Abschnitt 3.1 haben wir eine Verträglichkeitsrelation zwischen $F(A)$ und $R(A)$ gegeben durch: $f \in F_k(A)$ ist verträglich mit $\Theta \subseteq A^J$ genau dann, wenn für alle $\rho_1, \dots, \rho_k \in \Theta$ auch $f \circ (\rho_1, \dots, \rho_k) = f(\rho_1, \dots, \rho_k) \in \Theta$. Diese Relation definiert eine Galoisverbindung zwischen $F(A)$ und $R(A)$.

Wie zuvor bezeichne für $S \subseteq R(A)$

$$\mathrm{Pol}(S) := \{f \in F(A) \mid f \text{ ist verträglich mit allen } \Theta \in S\} = \bigcap_{\Theta \in S} \mathrm{Pol}\left(\{\Theta\}\right)$$

und

$$\mathrm{Pol}_k(S) := \mathrm{Pol}(S) \cap F_k(A).$$

Lemma 3.12. *Sei $S \subseteq R(A)$. Dann gilt $\mathrm{Pr}(A) \subseteq \mathrm{Pol}(S)$, d.h. die Projektionen sind mit allen Relationen verträglich.*

Beweis. Sei $\xi_i^{(k)}$ eine k-stellige Projektion ($1 \le i \le k$) und $\Theta \in S$, $\Theta \subseteq A^J$ (J endlich). Seien weiters $\rho_1, \dots, \rho_k \in \Theta$. Dann ist $\xi_i^{(k)}(\rho_1, \dots, \rho_k) = \rho_i \in \Theta$ und somit $\xi_i^{(k)} \in \mathrm{Pol}(S)$. □

Wir können nun den ersten Teil des Hauptsatzes der Galois-Theorie "Funktionen–Relationen" formulieren und beweisen:

Satz 3.13 (Hauptsatz, 1. Teil)**.** *Die Galois-abgeschlossenen Mengen von $F(A)$ sind genau die Clones auf A, d.h.*

$$C \subseteq F(A) \text{ ist Clone auf } A \Leftrightarrow \exists S \subseteq R(A) \text{ mit } C = \mathrm{Pol}(S).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\mathrm{Pol}(S)$ immer ein Clone auf A ist. Nach Lemma 3.12 ist $\mathrm{Pr}(A) \subseteq \mathrm{Pol}(S)$, es bleibt also zu zeigen, dass $\mathrm{Pol}(S)$ unter der Komposition abgeschlossen ist. Sei $f \in \mathrm{Pol}_k(S)$, $g_1, \dots, g_k \in \mathrm{Pol}_m(S)$ und $\Theta \in S$, $\Theta \subseteq A^J$. Wir müssen die Verträglichkeitsbedingung für $f(g_1, \dots, g_k)$ nachweisen: Seien $\rho_1, \dots, \rho_m \in \Theta$ beliebig. Dann gilt nach dem Super-Assoziativgesetz

$$\left(f\left(g_1, \dots, g_k\right)\right)\left(\rho_1, \dots, \rho_m\right) = f(\underbrace{g_1(\rho_1, \dots, \rho_m)}_{\in\Theta}, \dots, \underbrace{g_k(\rho_1, \dots, \rho_m)}_{\in\Theta}) \in \Theta.$$

Sei nun C ein Clone. Dann ist $C_k := C \cap F_k(A) \subseteq F_k(A) = A^J$ mit $J = A^k$ endlich. Also kann C_k als endlichstellige Relation aufgefasst werden. Wir werden zeigen, dass $C = \mathrm{Pol}(\{C_k \mid k \in \mathbb{N}^*\})$ gilt.

Nach dem ersten Teil des Beweises ist $D^{(k)} := \mathrm{Pol}(\{C_k\})$ ein Clone. Es gilt sogar $D_k^{(k)} = D^{(k)} \cap F_k(A) = C_k$, denn: Sei $f, g_1, \ldots, g_k \in C_k$, dann ist $f(g_1, \ldots, g_k) \in C_k$, da C bezüglich der Komposition abgeschlossen ist. Es ist also $f \in \mathrm{Pol}(\{C_k\})$ und daher $C_k \subseteq D_k^{(k)}$. Sei umgekehrt $f \in D_k^{(k)}$. Da $\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_k^{(k)} \in C_k$ und C_k mit $D_k^{(k)}$ verträglich ist, muss $f = f(\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_k^{(k)}) \in C_k$ sein. Also ist $D_k^{(k)} \subseteq C_k$.

Es sei nun $D := \bigcap_{k=1}^{\infty} D^{(k)} = \mathrm{Pol}(\{C_k \mid k \in \mathbb{N}^*\})$. Wir werden zeigen, dass $C = D$ gilt:

Sei $f \in C$, dann gibt es ein m, so dass $f \in C_m$. Seien $g_1, \ldots, g_m \in C_k$, für beliebiges (festes) k. Dann ist auch $f(g_1, \ldots, g_m) \in C_k$, denn C ist abgeschlossen bezüglich Komposition. Also ist f mit allen C_k verträglich und $C \subseteq D$.

Sei umgekehrt $f \in D$, dann gibt es ein m, so dass $f \in D_m \subseteq D_m^{(m)} = C_m \subseteq C$. Also ist $D \subseteq C$ und daher insgesamt $D = C$. $\square$

Satz 3.14 (Hauptsatz, 2. Teil)**.** *Eine Menge $S \subseteq R(A)$ ist genau dann Galois-abgeschlossen, wenn sie ein "relationaler Clone" ist.*

Dabei ist ein *relationaler Clone* eine Teilmenge von $R(A)$, die gewissen Abschlussbedingungen genügt. Es soll hier weder eine genauere Definition noch ein Beweis gebracht werden.

3.5 Der Satz von Rosenberg

Aus dem Satz 3.13 können wir folgendes Korollar ableiten:

Korollar 3.15. *Der Clone-Verband* $(\mathrm{Clo}(A), \cap, \vee)$ *hat über einer endlichen Menge A nur endlich viele Koatome.*

Beweis. Sei C ein maximaler Clone auf A. Nach dem Beweis des Hauptsatzes gilt $C_2 = \mathrm{Pol}_2(\{C_2\})$ und aufgrund des Satzes von Sierpinski (3.11) $C_2 \neq F_2(A)$, da sonst $C = F(A)$ wäre. Daher gilt auch $\mathrm{Pol}(\{C_2\}) \neq F(A)$. Ebenfalls aus dem Beweis des Hauptsatzes folgt $C \subseteq \mathrm{Pol}(\{C_2\})$ und damit, da C maximal ist, $C = \mathrm{Pol}(\{C_2\})$.

Jeder maximale Clone hat also die Gestalt $\mathrm{Pol}(\{\Theta\})$ für ein $\Theta \subseteq A^{A^2} = F_2(A)$. Da A endlich ist, gibt es aber nur endlich viele solche Θ. $\square$

In einem Verband bezeichnet $[A, B]$ die Menge aller Elemente zwischen A und B. Ist M das größte Element des Verbandes, so heißt $[A, M]$ auch der *von A erzeugte Hauptfilter*.

Proposition 3.16. *Zu jedem $C \in \mathrm{Clo}(A)$ (A endlich) gibt es einen maximalen Clone D mit $C \subseteq D$.*

Beweis. Wir betrachten die geordnete Menge $([C, F(A)] \setminus \{F(A)\}, \subseteq)$ und wenden darauf des Lemma von Zorn an. Sei also $\{C^{(i)} \mid i \in I\}$ eine Kette in $[C, F(A)] \setminus \{F(A)\}$ $(I \neq \emptyset)$ und $D := \bigcup_{i \in I} C^{(i)}$. Dann ist sicher $D \supseteq C$ und D ein Clone. Es bleibt zu zeigen, dass $D \neq F(A)$.

Da A endlich ist, ist $F(A)$ endlich erzeugt, zum Beispiel von $F_2(A)$. Es sei $\{f_1, \ldots, f_m\}$ ein Erzeugendensystem. Damit ist $D \neq F(A)$ genau dann, wenn es ein $f_j \in \{f_1, \ldots, f_m\}$ gibt, so dass $f_j \notin D$. Angenommen $D = F(A)$. Dann liegen alle f_j in D, es gibt also Indizes $i_1, \ldots, i_m \in I$ mit $f_j \in C^{(i_j)}$. Sei $i = \max i_j$, dann liegen alle f_j in $C^{(i)}$, und daher ist $C^{(i)} = F(A)$, ein Widerspruch. $\square$

Um die maximalen Clones zu klassifizieren, benötigen wir einige spezielle Relationen[7].

Definition 3.17. Eine Permutation heißt *prim*, wenn sie nur aus Zyklen mit der gleichen primen Länge besteht.

Definition 3.18. Eine Relation $\Theta \subseteq A^4$ heißt *affin*, wenn es eine abelsche Gruppe $(A, +)$ gibt, so dass $(a, b, c, d) \in \Theta$ genau dann, wenn $a + b = c + d$ gilt. Eine affine Relation heißt *prim-affin*, wenn $(A, +)$ eine abelsche Gruppe ist, in der alle Elemente die gleiche prime Ordnung p haben.

Definition 3.19. Für $h \geq 1$ heißt eine Relation $\Theta \subseteq A^h$ *total symmetrisch*, wenn für alle Permutationen π von $\{1, \ldots, h\}$ und alle Tupel $(a_1, \ldots, a_h) \in A^h$:

$$(a_1, \ldots, a_h) \in \Theta \Leftrightarrow (a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(h)}) \in \Theta.$$

Definiert man $A_h \subseteq A^h$ durch

$$A_h := \{(a_1, \ldots, a_h) \mid \exists i \neq j : a_i = a_j\},$$

dann heißt $\Theta \subseteq A^h$ *total reflexiv*, wenn $A_h \subseteq \Theta$.

Wenn Θ total reflexiv und total symmetrisch ist, definiert man das *Zentrum* von Θ durch

$$C(\Theta) := \{a \in A \mid \forall a_2, \ldots, a_h \in A(a, a_2, \ldots, a_h) \in \Theta\}.$$

Die Relation Θ heißt *zentral*, wenn sie total reflexiv und total symmetrisch ist und ein nichtleeres Zentrum hat, das eine echte Teilmenge von A ist.

Es sei wie üblich $\xi_j^{(m)}$ die m-stellige Projektion auf die j-te Koordinate. Es sei $h = \{1, \ldots, h-1\}$ und ω_m die h-stellige Relation auf h^m, die folgende Bedingung erfüllt:

$$(a_1, \ldots, a_h) \in \omega_m \Leftrightarrow \forall 1 \leq j \leq m : (\xi_j^{(m)}(a_1), \ldots, \xi_j^{(m)}(a_h)) \in h_h.$$

Definition 3.20. Eine Relation $\Omega \subseteq A^h$ heißt *h-regulär erzeugt*, wenn es ein $m \geq 1$ und eine Surjektion $\varphi \colon A \to h^m$ gibt, so dass $\Theta = \varphi^{-1}(\omega_m)$.

Jede h-regulär erzeugte Relation ist total reflexiv und total symmetrisch.

Nun können wir endlich den Satz formulieren:

Satz 3.21 (Satz von Rosenberg). *Ein Clone C auf einer endlichen Menge A ist genau dann maximal, wenn $C = \mathrm{Pol}(\{\Theta\})$, wobei Θ eine Relation aus einer der folgenden Klassen ist:*

- *Die Menge aller Halbordnungen auf A, die ein größtes und ein kleinstes Element haben.*

[7] Die folgenden Definitionen sind nicht Prüfungsstoff.

- *Die Menge der Graphen aller primen Permutationen auf A.*
- *Die Menge aller nichttrivialen Äquivalenzrelationen auf A.*
- *Die Menge aller prim-affinen Relationen auf A.*
- *Die Menge aller zentralen Relationen auf A.*
- *Die Menge aller h-regulär erzeugten Relationen auf A.*

Der Beweis dieses Satzes würde den Rahmen der Vorlesung bei weitem sprengen, es sei nur folgendes angemerkt: Ist $C = \mathrm{Pol}(S) = \bigcap_{\Theta \in S} \mathrm{Pol}(\{\Theta\})$ maximal, so gibt es ein $\Theta_0 \in S$ mit $\mathrm{Pol}(\{\Theta_0\}) \neq F(A)$ und daher $\mathrm{Pol}(S) = \mathrm{Pol}(\{\Theta_0\})$.

4 Gleichungstheorien und Varietäten

Das Gebiet der "Equational Logic" versucht, Algebren durch die Gleichungen, die in ihnen gelten, zu charakterisieren. Zum Beispiel wird untersucht, welche Algebren mit einer zweistelligen Operation es gibt, die das Assoziativgesetz erfüllen.

4.1 Klassen und Varietäten

Die Gesamtheit aller Algebren eines Typs ist keine Menge im Sinn der axiomatischen Mengenlehre. Man spricht daher von *Klassen* algebraischer Strukturen, vgl. [1, S. 58ff].

Definition 4.1. Es sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren desselben Typs. Dann bezeichnet

- $S(\mathcal{K})$ die Klasse aller Unteralgebren von Algebren in $\mathcal{K}$;
- $H(\mathcal{K})$ die Klasse aller homomorphen Bilder von Algebren in $\mathcal{K}$;
- $I(\mathcal{K})$ die Klasse aller isomorphen Bilder von Algebren in $\mathcal{K}$ und
- $P(\mathcal{K})$ die Klasse aller direkten Produkte von Algebren in $\mathcal{K}$.

Lemma 4.2. *H, S und IP sind Hüllenoperatoren*[8].

Definition 4.3 (Varietät)**.** Eine Klasse $\mathcal{K}$ heißt *Varietät*, wenn $S(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$, $H(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$ und $P(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$.

Satz 4.4. *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren desselben Typs. Dann ist $HSP(\mathcal{K})$ die kleinste Varietät, die $\mathcal{K}$ umfasst.*

Lemma 4.5.

1. $SH(\mathcal{K}) \subseteq HS(\mathcal{K})$
2. $PS(\mathcal{K}) \subseteq SP(\mathcal{K})$
3. $PH(\mathcal{K}) \subseteq HP(\mathcal{K})$

Beweis. Sei $\mathfrak{A} \in SH(\mathcal{K})$. Dann gibt es ein $\mathfrak{B} \in H(\mathcal{K})$ mit $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$. Außerdem gibt es eine Algebra $\mathfrak{C}$ in $\mathcal{K}$ und einen surjektiven Homomorphismus $\varphi\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$. Es ist dann $\varphi^{-1}(A)$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{C}$ und, da φ surjektiv ist, $\varphi(\varphi^{-1}(A)) = A$, also $\mathfrak{A} \in HS(\mathcal{K})$.

Die Beweise der anderen zwei Aussagen gehen ähnlich, siehe [1, S. 59]. □

Beweis von Satz 4.4. Sei $\mathcal{K}' \supseteq \mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ eine Varietät, dann gilt offensichtlich $K' \supseteq HSP(\mathcal{K}) \supseteq \mathcal{K}$. Es bleibt also zu zeigen, dass $HSP(\mathcal{K})$ eine Varietät ist.

$H(HSP(\mathcal{K})) = HSP(\mathcal{K})$, da H Hüllenoperator ist. Mit Lemma 4.5 gilt $S(HSP(\mathcal{K})) = SH(SP(\mathcal{K})) \subseteq HS(SP(\mathcal{K})) = HSP(\mathcal{K})$ und $P(HSP(\mathcal{K})) \subseteq HPSP(\mathcal{K}) \subseteq HSPP(\mathcal{K}) \subseteq HSIPIP(\mathcal{K}) \subseteq HSIP(\mathcal{K}) \subseteq HSHP(\mathcal{K}) \subseteq HHSP(\mathcal{K}) = HSP(\mathcal{K})$. □

[8] Bei entsprechender Ausweitung der Definition auf Klassen.

Es ist also $\mathcal{K}$ genau dann eine Varietät, wenn $HSP(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ ist. HSP ist ein Hüllenoperator ($HSPHSP(\mathcal{K}) \subseteq HSHSPP(\mathcal{K}) \subseteq HHSSP(\mathcal{K}) = HSP(\mathcal{K})$), und die Varietäten sind genau die abgeschlossenen Klassen.

4.2 Frei erzeugte Algebren

Definition 4.6. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse, X eine beliebige Menge und $\mathfrak{F} = (F, \Omega) \in \mathcal{K}$ mit $X \subseteq F$. Dann heißt $\mathfrak{F}$ *frei erzeugt von X in $\mathcal{K}$* oder *freie $\mathcal{K}$-Algebra mit freiem Erzeugendensystem X*, wenn

1. $\mathfrak{F} = \langle X \rangle$,
2. $\forall \mathfrak{A} = (A, \Omega) \in \mathcal{K}\ \forall \varphi \colon X \to A$ gibt es eine Fortsetzung von φ zu einem Homomorphismus $\bar{\varphi} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{A}$.

Man hat also

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"'] & F \arrow[dl, dashed, "\exists\bar{\varphi}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Wegen $\langle X \rangle = \mathfrak{F}$ ist $\bar{\varphi}$ eindeutig bestimmt.

Satz 4.7.

- *Sind $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ frei erzeugt von X, dann sind sie isomorph. Man spricht daher von der in $\mathcal{K}$ von X frei erzeugten Algebra $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X)$.*
- *Ist $|X| = |X'|$, dann ist $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X) \cong \mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X')$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{F}_1 = (F_1, \Omega)$ von X und $\mathfrak{F}_2 = (F_2, \Omega)$ von X' in $\mathcal{K}$ frei erzeugt mit $|X| = |X'|$ und $\varphi_1 \colon X \to X'$ bijektiv. Dann hat man

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "\varphi_1"] \arrow[d, hook] & X' \arrow[l, shift left, "\varphi_2 := \varphi_1^{-1}"] \arrow[d, hook] \\ \mathfrak{F}_1 \arrow[r, shift left, "\bar{\varphi}_1"] & \mathfrak{F}_2 \arrow[l, shift left, "\bar{\varphi}_2"] \end{tikzcd}$$

und $\bar{\varphi}_2 \circ \bar{\varphi}_1|_X = \mathrm{id}_X$. Da X Erzeugendensystem ist, folgt $\bar{\varphi}_2 \circ \bar{\varphi}_1 = \mathrm{id}_{F_1}$ und analog $\bar{\varphi}_1 \circ \bar{\varphi}_2 = \mathrm{id}_{F_2}$. Daher ist $\bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_1^{-1}$ und $\bar{\varphi}_1$ ein Isomorphismus. □

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(n)$ die frei erzeugte Algebra mit einem Erzeugendensystem der Mächtigkeit n.

Beispiele.

- $\mathcal{V}$ = Vektorräume, $V \in \mathcal{V}$. Für jede Basis B von V gilt $V \cong \mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(B)$, d.h. jeder Vektorraum ist frei erzeugt.
- $\mathcal{G}$ = Gruppen, $X = \{x\}$, dann ist $\mathfrak{F}_{\mathcal{G}}(X) \cong \mathbb{Z}$ (genauer $\mathbb{Z} = \mathfrak{F}_{\mathcal{G}}(\{1\}) = \mathfrak{F}_{\mathcal{G}}(\{-1\})$). Alle anderen zyklischen Gruppen sind nicht frei. $\mathfrak{F}_{\mathcal{G}}(\{x_1, x_2\})$ hat schon eine sehr komplizierte Struktur.

- $\mathcal{A}$ = abelsche Gruppen ($\mathbb{Z}$-Moduln), dann ist wieder $\mathfrak{F}_{\mathcal{A}}(\{x\}) \cong \mathbb{Z}$. Für allgemeines X gilt hier

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{A}}(X) \cong \bigoplus_{x \in X} \mathfrak{F}_{\mathcal{A}}(\{x\}) \cong \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z},$$

wobei $\bigoplus$ die direkte Summe bezeichnet (d.h. fast alle Summanden müssen 0 sein). In der Klasse der abelschen Gruppen stimmt nämlich das Coprodukt mit der direkten Summe überein, und es gilt allgemein:

- Für eine Quasivarietät $\mathcal{K}$ (d.h. $\mathcal{K}$ ist abgeschlossen bezüglich I, S und P) und $\coprod$ das Coprodukt in $\mathcal{K}$ gilt

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X) \cong \coprod_{x \in X} \mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(\{x\}).$$

- $\mathcal{B}$ = Boolesche Algebren, $|X| = n \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}(X) \cong 2^{2^n} = \{f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}\}.$$

Genauer: Diese Algebra wird für $n > 0$ von den Projektionen $\{\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}\}$ frei erzeugt (vgl. Satz von Stone).

- $\mathcal{V}$ = Verbände:

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(\{x\}) \cong \{x\},$$

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(\{x_1, x_2\}) \cong \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & x_1 \vee x_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ x_1 & & x_2 \\ & x_1 \wedge x_2 \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd},$$

$$|\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(\{x_1, x_2, x_3\})| = \aleph_0.$$

- $\mathcal{H}$ = Halbgruppen:

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}(X) \cong \{x_1 \ldots x_n \mid n \in \mathbb{N}^*,\ x_i \in X\}.$$

Diese Algebra heißt *Wortalgebra* über dem *Alphabet* X.

- $\mathcal{M}$ = Monoide:

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{M}}(X) \cong \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}(X) \cup \{\varepsilon\}.$$

Dabei bezeichnet ε das leere Wort.

4.3 Die Galoisverbindung

Wie in Abschnitt 1.3 bezeichne $T(X)$ die Terme über X.

Definition 4.8 (Gleichung)**.** Jedes Paar $(s,t) \in T(X) \times T(X)$ wird *Gleichung* (oder *Gesetz*) genannt. Man schreibt dafür auch $s = t$ (oder $s \approx t$).

Definition 4.9. Man sagt, eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$ *erfüllt* $s(x_1, \ldots, x_k) = t(x_1, \ldots, x_k)$, wenn $\forall a_1, \ldots, a_k \in A$ gilt: $s(a_1, \ldots, a_k) = t(a_1, \ldots, a_k)$. Man schreibt dafür

$$\mathfrak{A} \models s = t.$$

Beispiel. Sei $\mathfrak{G} = (G, \cdot, e, ^{-1})$ eine Gruppe. Dann gilt

$$\mathfrak{G} \models x_1(x_2x_3) = (x_1x_2)x_3,\ ex_1 = x_1,\ x_1^{-1}x_1 = e.$$

Diese Gesetze reichen umgekehrt aus, um die Klasse der Gruppen unter allen Algebren vom Typ $(2, 0, 1)$ zu charakterisieren. Es gelten aber noch viele weitere Gesetze, u. a.:

$$\mathfrak{G} \models (x_1x_2)(x_3x_4) = x_1(x_2(x_3x_4))$$
$$\mathfrak{G} \models (x_1x_2)^{-1} = x_2^{-1}x_1^{-1}$$

Definition 4.10 (Modell, gleichungsdefinierte Klasse)**.** Sei $\Sigma \subseteq T(X) \times T(X)$ [9]. Dann bezeichnet

$$M_X(\Sigma) = M(\Sigma) := \{\mathfrak{A} \mid \forall (s,t) \in \Sigma : \mathfrak{A} \models s = t\}$$

die Klasse der *Modelle* von Σ, wobei nur Algebren vom selben Typ wie $T(X)$ betrachtet werden. Solche Klassen werden auch *gleichungsdefinierte Klassen* genannt.

Definition 4.11 (Gleichungstheorie)**.** Es sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren desselben Typs wie $T(X)$. Dann bezeichnet

$$G_X(\mathcal{K}) = G(\mathcal{K}) := \{(s,t) \in T(X) \times T(X) \mid \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models s = t\}$$

die Menge der in $\mathcal{K}$ gültigen Gleichungen (Gesetze) über X. Solche Mengen von Gleichungen nennt man *Gleichungstheorien.*

Die "erfüllt"-Relation $\models$ induziert also (bei entsprechender Ausweitung der Definition auf Klassen) eine Galoisverbindung zwischen Algebren und Gleichungen. Die abgeschlossenen Klassen/Mengen sind die gleichungsdefinierten Klassen einerseits und die Gleichungstheorien andererseits. Eine interne Charakterisierung wird der *Hauptsatz der Equational Logic* von G. Birkhoff (Sätze 4.24 und 4.28) liefern. Dazu müssen wir aber etwas Vorarbeit leisten. Zuerst noch ein paar Bemerkungen zu frei erzeugten Algebren und Gesetzen:

Anmerkung 4.12. Ist X mindestens abzählbar unendlich, dann gelten in $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X)$ nur mehr die "trivialen" Gesetze $G(\mathcal{K})$. In speziellen Fällen kann das aber auch schon viel früher der Fall sein (ohne Beweise): Bei Gruppen schon bei $\mathfrak{F}_{\mathcal{G}}(\{x_1, x_2\})$, bei Verbänden bei $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(\{x_1, x_2, x_3\})$ und bei Booleschen Algebren (aufgrund des Satzes von Stone) sogar schon bei $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}(\emptyset) = \{0, 1\}$.

Satz 4.13. *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren des selben Typs wie $T(X)$. Dann gilt*

$$G(\mathcal{K}) = \bigcap \{\ker \varphi \mid \varphi \colon T(X) \to \mathfrak{A} \text{ Homomorphismus, } \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\}\,.$$

Beweis. Die rechte Seite der behaupteten Gleichheit sei mit Φ bezeichnet.

Seien $s, t \in T(X)$, $s = s(x_1, \dots, x_k)$, $t = t(x_1, \dots, x_k)$ und $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. Ist nun $\varphi \colon T(X) \to \mathfrak{A}$ ein Homomorphismus und $a_j := \varphi(x_j)$, dann gilt nach Anmerkung 1.22: $\varphi(s) = s(a_1, \dots, a_k)$ und $\varphi(t) = t(a_1, \dots, a_k)$. Es gilt also

$$(s,t) \in \ker \varphi \Leftrightarrow s(a_1, \dots, a_k) = t(a_1, \dots, a_k).$$

[9]Es würde eine abzählbare Menge $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ genügen.

Umgekehrt erhält man durch beliebige Festlegung der a_i und $\varphi(x_i) = a_i$ einen Homomorphismus $T(X) \to \mathfrak{A}$ (Satz 1.18). Daher ist $(s,t) \in \Phi$ genau dann, wenn

$$\forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \forall a_1, \ldots, a_k \in A : s(a_1, \ldots, a_k) = t(a_1, \ldots, a_k).$$

Das ist genau dann der Fall, wenn $\forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : \mathfrak{A} \models s = t$, also $(s,t) \in G(\mathcal{K})$. $\square$

Korollar 4.14. *$G(X) \in \operatorname{Con} T(X)$.*

Somit ist es möglich, die Faktoralgebra

$$T(X)/G(\mathcal{K}) = \left\{ [t]_{G(\mathcal{K})} \mid t \in T(X) \right\} = \left\langle \overline{X} \right\rangle$$

zu bilden, wobei $\bar{x} := [x]_{G(\mathcal{K})}$ (für $x \in X$) und $\overline{X} := \{\bar{x} \mid x \in X\}$ ist.

Anmerkung 4.15. Wäre $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, müsste $x_1 = x_2$ in $\mathcal{K}$ gelten und daher müssten die Algebren in $\mathcal{K}$ trivial sein (höchstens einelementig). In diesem Fall ist $G(\mathcal{K}) = T(X) \times T(X)$ und $\mathcal{K}$ eine Varietät. Wir nehmen daher ab jetzt an, dass die Elemente von $\overline{X}$ paarweise verschieden sind.

Satz 4.16. *Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und $\varphi \colon \overline{X} \to A$ beliebig. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $\bar{\varphi} \colon T(X)/G(\mathcal{K}) \to \mathfrak{A}$, der φ fortsetzt.*

Beweis. Es sei $\psi \colon X \to A$ mit $\psi(x) = \varphi(\bar{x})$, $x \in X$. Dann gibt es eine eindeutige Fortsetzung $\bar{\psi} \colon T(X) \to \mathfrak{A}$ (Satz 1.18). Sei $\pi \colon T(X) \to T(X)/G(\mathcal{K})$ die kanonische Projektion. Falls $\ker \pi \subseteq \ker \bar{\psi}$ ist, gibt es einen Homomorphismus $\bar{\varphi}$, der folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\bar{\psi}"'] & T(X)/G(\mathcal{K}) \arrow[dl, "\bar{\varphi}"] \\ \mathfrak{A} & \end{tikzcd}$$

$\bar{\varphi}$ kann definiert werden durch $\bar{\varphi}([t]_{G(\mathcal{K})}) := \bar{\psi}(t)$. Sei also $(s,t) \in \ker \pi$ mit $s = s(x_1, \ldots, x_k)$, $t = t(x_1, \ldots, x_k)$. Da $\mathfrak{A} \models s = t$, gilt

$$\bar{\psi}(s) = s(\bar{\psi}(x_1), \ldots, \bar{\psi}(x_k)) = t(\bar{\psi}(x_1), \ldots, \bar{\psi}(x_k)) = \bar{\psi}(t)$$

und daher $(s,t) \in \ker \bar{\psi}$. Somit gilt tatsächlich $\ker \pi \subseteq \ker \bar{\psi}$, und aufgrund $\left\langle \overline{X} \right\rangle = T(X)/G(\mathcal{K})$ ist $\bar{\varphi}$ durch obige Vorschrift eindeutig bestimmt. $\square$

Es ist

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}([t(x_1, \ldots, x_k)]_{G(\mathcal{K})}) &= \bar{\psi}(t(x_1, \ldots, x_k)) \\ = t(\bar{\psi}(x_1), \ldots, \bar{\psi}(x_k)) &= t(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)). \end{aligned}$$

Falls die Algebra $T(X)/G(\mathcal{K})$ in $\mathcal{K}$ liegt, ist sie also frei erzeugt von $\overline{X}$ in $\mathcal{K}$.

Lemma 4.17. $T(X)/G(\mathcal{K}) \in ISP(\mathcal{K})$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{T} := T(X)$ und $\Theta := G(\mathcal{K})$. Mit

$$M := \{ \ker \varphi \mid \varphi\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{A} \text{ Homomorphismus}, \mathfrak{A} \in \mathcal{K} \}$$

gilt nach Satz 4.13:

$$\Theta = \bigcap_{\Psi \in M} \Psi,$$

also $\Theta \subseteq \ker \varphi$ für jedes solche φ. Nach dem Isomorphiesatz 1.13 und dem Homomorphiesatz gilt daher für jedes feste φ:

$$(\mathfrak{T}/\Theta) \,/\, (\ker \varphi/\Theta) \cong \mathfrak{T}/\ker \varphi \cong \varphi(\mathfrak{T}) \in S(\mathcal{K}),$$

also $(\mathfrak{T}/\Theta) \,/\, (\ker \varphi/\Theta) \in IS(\mathcal{K})$. Mittels der injektiven Einbettung

$$[t]_\Theta \mapsto \Big([[t]_\Theta]_{\Psi/\Theta} \Big)_{\Psi \in M}$$

sieht man unschwer $\mathfrak{T}/\Theta \in ISP(\{(T/\Theta)/(\ker \varphi/\Theta) \mid \varphi\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\})$. Es folgt $\mathfrak{T}/\Theta \in ISP(IS(\mathcal{K})) \subseteq ISP(\mathcal{K})$. □

Korollar 4.18. *Falls $\mathcal{K}$ abgeschlossen bezüglich I, S und P ist (man nennt solche Klassen* Quasivarietäten*) und nichttrivial (d.h. $\exists\, \mathfrak{A} \in \mathcal{K} : |A| > 1$), dann gilt:*

- $T(X)/G(\mathcal{K}) \in \mathcal{K}$;
- $T(X)/G(\mathcal{K}) \cong \mathfrak{F}_\mathcal{K}(X)$;
- *es gibt freie $\mathcal{K}$-Algebren mit freiem Erzeugendensystem von beliebiger Mächtigkeit.*

Insbesondere gilt dies für nichttriviale Varietäten.

Lemma 4.19. *Sei $\mathcal{K}$ eine nichttriviale Varietät. Für $E \subseteq X$ gilt $\mathfrak{F}_\mathcal{K}(E) \cong \langle E \rangle \leq \mathfrak{F}_\mathcal{K}(X)$.*

Beweis. $\langle E \rangle \in \mathcal{K}$, da $\mathcal{K}$ eine Varietät ist. Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und $\varphi\colon E \to A$ beliebig. Setze φ auf X zu φ' fort. Dann existiert eine Fortsetzung $\bar{\varphi}'$ von φ' zu einem Homomorphismus $\mathfrak{F}_\mathcal{K}(X) \to \mathfrak{A}$. Die gesuchte Abbildung $\bar{\varphi}$ ist dann die Einschränkung $\bar{\varphi}'|_{\langle E \rangle}$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dd, bend right, "\varphi"'] & & \langle E \rangle \arrow[dl, hook] \arrow[ddll, bend left, "\bar{\varphi}=\bar{\varphi}'|_{\langle E \rangle}"] \\
X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi'"'] & \mathfrak{F}_\mathcal{K}(X) \arrow[dl, "\bar{\varphi}'"'] & \\
\mathfrak{A} & &
\end{tikzcd}$$

□

Lemma 4.20. *Sei $\mathcal{K}$ eine nichttriviale Varietät und X eine beliebige Menge. Dann gibt es einen injektiven Homomorphismus*

$$\varphi\colon \mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X) \hookrightarrow \prod_{\substack{\emptyset \neq E \subseteq X \\ E \text{ endlich}}} \mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(E).$$

Beweis. Seien $\varphi_E\colon X \to \langle E\rangle = \mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(E) \leq \mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X)$ beliebige Abbildungen mit $\varphi_E|_E = \mathrm{id}_E$. Dann gibt es Fortsetzungen zu Homomorphismen $\bar{\varphi}_E\colon \mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X) \to \langle E\rangle$, die dann jeweils $\langle E\rangle$ festhalten. Die Einbettung φ sei nun definiert durch

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X) \to \prod\limits_{\substack{\emptyset \neq E \subseteq X \\ E \text{ endlich}}} \langle E\rangle \\ \qquad t \mapsto \Big(\bar{\varphi}_E(t)\Big)_{\substack{\emptyset \neq E \subseteq X \\ E \text{ endlich}}} \end{cases}.$$

Terme $t = t(x_1, \ldots, x_k)$ mit $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq E$ werden durch $\bar{\varphi}_E$ festgehalten. Seien $s_1 = s_1(x_1, \ldots, x_n)$ und $s_2 = s_2(x_1, \ldots, x_n)$ zwei unterschiedliche Terme aus $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X)$ und $D := \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dann unterscheiden sich die Bilder von s_1 und s_2 unter φ zumindest in der mit D indizierten Koordinate des Produktes. Die Abbildung φ ist daher injektiv. □

Korollar 4.21. *In jeder nichttrivialen Varietät $\mathcal{K}$ gilt*

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X) \in ISP\left(\{\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(E) \mid \emptyset \neq E \subseteq X,\ E \text{ endlich}\}\right) = ISP(\{\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}).$$

Satz 4.22. *Für jede nichttriviale Varietät $\mathcal{K}$ gilt*

$$\mathcal{K} = HSP\left(\{\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}\right) = HSP\left(\{\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(\omega)\}\right),$$

wobei ω eine abzählbar unendliche Menge ist.

Beweis. Da die freien Algebren in $\mathcal{K}$ enthalten sind, gilt $\mathcal{K} \supseteq \{\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Sei $\mathfrak{A} = (A, \Omega) \in \mathcal{K}$. Dann ist $\mathfrak{A}$ homomorphes Bild von $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(A)$ (setze $\varphi = \mathrm{id}_A$ fort). Nach Korollar 4.21 folgt

$$\mathfrak{A} \in H(\{\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(A)\}) \subseteq H(ISP(\{\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}) = HSP(\{\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}).$$

Dei zweite Gleichheit folgt aus $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(n) \in H(\{\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(\omega)\})$ (setze eine beliebige surjektive Abbildung $\omega \to \{1, \ldots, n\}$ fort). □

Satz 4.23. *Jede gleichungsdefinierte Klasse $\mathcal{K}$ ist auch eine Varietät.*

Beweis. Es sei $\mathcal{K} = M(\Sigma)$ für ein $\Sigma \subseteq T(X) \times T(X)$. Zu zeigen ist, dass in $S(\mathcal{K})$, $H(\mathcal{K})$ und $P(\mathcal{K})$ auch alle Gesetze aus Σ gelten.

In Unteralgebren gelten immer auch alle Gesetze der Algebra.

Sei nun $\mathfrak{A} = (A, \Omega) \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{B} = (B, \Omega) \in H(\mathcal{K})$, so dass $\mathfrak{B}$ das Bild von $\mathfrak{A}$ unter φ ist. Weiters sei $(s, t) \in \Sigma$, $s = s(x_1, \ldots, x_k)$, $t = t(x_1, \ldots, x_k)$. Zu zeigen ist, dass $\mathfrak{B} \models s = t$. Seien nun $b_1, \ldots, b_k \in B$, dann gibt es $a_1, \ldots, a_k \in A$ mit $\varphi(a_j) = b_j$. Wegen Satz 1.24 gilt:

$$\begin{aligned} s(b_1, \ldots, b_k) &= s(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k)) \\ &= \varphi(s(a_1, \ldots, a_k)) \\ &= \varphi(t(a_1, \ldots, a_k)) \\ &= t(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k)) \\ &= t(b_1, \ldots, b_k). \end{aligned}$$

Der Beweis für $P(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$ verläuft ähnlich, indem man

$$t\left((a_{1j})_{j \in J}, \ldots, (a_{kj})_{j \in J}\right) = \left(t\left(a_{1j}, \ldots, a_{k_j}\right)\right)_{j \in J}$$

benutzt. $\square$

Satz 4.24 (1. Hauptsatz der Gleichungstheorie)**.** *Eine Klasse ist genau dann gleichungsdefiniert, wenn sie eine Varietät ist.*

Beweis. Die eine Richtung wurde gerade gezeigt. Sei nun $\mathcal{K}$ eine Varietät und $\mathcal{M} := M(G(\mathcal{K}))$. Zu zeigen ist, dass $\mathcal{K} = \mathcal{M}$ gilt. Sei X eine beliebige Menge, dann gilt wegen $G(\mathcal{K}) = G(\mathcal{M})$:

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{M}}(X) \cong T(X)/G(\mathcal{M}) = T(X)/G(\mathcal{K}) \cong \mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X).$$

Insbesondere gilt daher

$$\mathcal{K} = HSP(\{\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(\omega)\}) = HSP(\{\mathfrak{F}_{\mathcal{M}}(\omega)\}) = \mathcal{M}.$$

$\square$

Wir wollen nun umgekehrt die Gleichungstheorien charakterisieren. Dazu benötigen wir folgende Definition:

Definition 4.25. Eine Kongruenz $\Theta \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A})$ heißt *vollinvariant*, wenn sie auch mit allen Endomorphismen verträglich ist, also $\Theta \in \mathrm{Con}(A, \Omega \cup \mathrm{End}(\mathfrak{A}))$.

Satz 4.26. *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren. Dann ist $G(\mathcal{K})$ eine vollinvariante Kongruenz auf $T(X)$.*

Beweis. Dass $G(\mathcal{K})$ eine Kongruenz ist, wurde schon in Korollar 4.14 festgestellt. Sei $(s(x_1, \ldots, x_k), t(x_1, \ldots, x_k)) \in G(\mathcal{K})$, $x_1, \ldots, x_k \in X$ und $u_1, \ldots, u_k \in T(X)$, dann kann man die Terme für die Variablen "substituieren" und erhält wieder ein gültiges Gesetz, also $(s(u_1, \ldots, u_k), t(u_1, \ldots, u_k)) \in G(\mathcal{K})$. Jeder Homomorphismus von $T(X)$ in eine Algebra ist eindeutig durch die Bilder der Menge X bestimmt. Daher ist auch jeder Endomorphismus schon durch die Bilder von X eindeutig bestimmt. Umgekehrt kann man jede Abbildung $x_i \mapsto u_i$ eindeutig auf $T(X)$ fortsetzen. Daher kann man die "Substitutionsregel" folgendermaßen umformulieren:

$$\forall \varphi \in \mathrm{End}(T(X)) : (s, t) \in G(\mathcal{K}) \Rightarrow (\varphi(s), \varphi(t)) \in G(\mathcal{K}).$$

Also ist $G(\mathcal{K})$ vollinvariant. $\square$

Satz 4.27. *Sei Θ eine vollinvariante Kongruenz auf $T(X)$, $|X| \geq \aleph_0$. Dann ist*

$$\Theta = G(\{T(X)/\Theta\}).$$

Beweis. Sei $(s,t) \in \Theta$, $s = s(x_1, \ldots, x_n)$, $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_1, \ldots, x_n \in X$. Des weiteren seien $[u_1]_\Theta, \ldots, [u_n]_\Theta \in T(X)/\Theta$. Da Θ vollinvariant ist, gilt nach der Feststellung über das "Substituieren" von Termen im Beweis des vorherigen Satzes

$$s(u_1, \ldots, u_n) = t(u_1, \ldots, u_n).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} s([u_1]_\Theta, \ldots, [u_n]_\Theta) &= [s(u_1, \ldots, u_n)]_\Theta = \\ &= [t(u_1, \ldots, u_n)]_\Theta = t([u_1]_\Theta, \ldots, [u_n]_\Theta) \end{aligned}$$

und somit $(s,t) \in G(\{T(X)/\Theta\})$.

Sei umgekehrt $(s,t) \in G(\{T(X)/\Theta\})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} [s(u_1, \ldots, u_n)]_\Theta &= s([u_1]_\Theta, \ldots, [u_n]_\Theta) = \\ &= t([u_1]_\Theta, \ldots, [u_n]_\Theta) = [t(u_1, \ldots, u_n)]_\Theta \end{aligned}$$

und somit $(s,t) \in \Theta$. $\square$

Zusammangefasst ergibt das den

Satz 4.28 (2. Hauptsatz der Gleichungstheorie)**.** *Sei $\Sigma \subseteq T(X) \times T(X)$ mit X abzählbar unendlich. Dann gibt es genau dann eine Klasse $\mathcal{K}$ mit $\Sigma = G(\mathcal{K})$, wenn Σ eine vollinvariante Kongruenz auf $T(X)$ ist.*

Varietäten stehen also in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu den vollinvarianten Kongruenzen auf $T(X)$, X abzählbar unendlich. Der "Verband" aller Varietäten vom Typ Ω entspricht umkehrbar eindeutig dem Kongruenzverband $\mathrm{Con}(T(X), \Omega \cup \mathrm{End}(T(X), \Omega))$.

Literatur

[1] Ihringer, Thomas. *Allgemeine Algebra.* Mit einem Anhang über universelle Coalgebra von H. P. Gumm. Heldermann, 2003.

[2] Eigenthaler, Günther. *Einige Bemerkungen über Clones und interpolierbare Funktionen auf universellen Algebren.* Beiträge zur Algebra und Geometrie 15:121–127, 1983.

[3] Pinsker, Michael. *Rosenberg's classification of maximal clones.* Diplomarbeit an der TU Wien, 2002.

[4] Ganter, Bernhard und Rudolf Wille. *Formale Begriffsanalyse. Mathematische Grundlagen.* Springer, 1996.

Symbolverzeichnis

Index